第12卷 第1期 复合材料学报 Vol. 12 No. 1
1995年 2月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Feb. 1995

复合材料夹层板壳一种等效分析方法

晏麓晖 曾首义 陈斌 文树春
(长沙工程兵学院,长沙 410072)

摘 要 本文研究了复合材料夹层板壳的一种等效分析方法,首先由壳体理论导出了夹层板壳的内力和位移表达式,通过与各向异性单层板壳理论的比较,提出了二者等效的条件,从而把夹层板壳问题简化为一个等效各向异性单层板壳问题,这用有限元法很容易求解,并对一个工程实例进行了计算,证实了该方法的有效性。

关键词 复合材料,夹层板壳,等效分析方法

1 前 言

复合材料夹层板壳结构近年来在航空、航天和防护工程等领域得到了广泛应用,然而由于结构的多相、各向异性和层片构造等性质,相应的力学分析十分复杂和困难,目前进行计算分析通常采用两种处理方法:一是求完全的解析解[1,2],即在对夹层结构的层间变形协调作出合理假设后,直接导出问题的控制方程寻求相应的解析解,但是这只有在某些特殊的情况下才能实现;二是直接进行有限元计算,这种方法的关键是建立一个能较好地处理结构呈层性和横向剪切模量较低的多(夹)层有限元单元,该项研究十多年来有了很大发展,已形成了两大类:多层位移板壳元[3,4]和多层杂交板壳元[5]单元系列,从反映结构宏观变形规律看,二者都达到了一定的精度,成为解决复合材料夹(多)层板壳结构问题最为有效的工具,然而还没有合适的通用程序备工程人员使用,使得直接有限元法在此类工程实际中应用还有一定的距离。

本文研究了复合材料夹层板壳结构力学计算的一种等效分析方法,即根据结构变形的控制方程,将夹层板壳转化成一等效的单层板壳,然后通过对等效单层板壳进行有限元分析,间接求得夹层板壳的变形规律。该方法将解析分析与有限元有机地结合起来,既解决了完全解析解局限性大、应用面窄的缺陷,又因夹层板壳的呈层性和横向剪切模量低的特点在等效板壳的材料和结构参数中以显式出现,从而解决了直接有限元计算量大、所需内存多、计算时间长的问题,同时,单层板壳的有限元计算业已相当成熟,有许多通用程序可借鉴和使用,使得分析更为方便实用。文章选用了某工程实例进行了计算,并与相应实验结果及直接有限元解进行了比较,证实了方法的可靠性和合理性。

2 复合材料夹层板壳结构的等效壳体理论

这里以工程中常见的复合材料薄蒙皮内夹软芯材壳体作为研究对象,该夹层壳体具有以

本文于1994年7月4日收到修改稿,1992年5月23日收到初稿

下特点：(1)蒙皮很薄，其厚度是芯材厚度的小量级量，即 $h_c^{(1)}$、$h_c^{(2)}>>h^{(1)}$、$h^{(2)}$(图 2)；(2)芯材弹性模量比蒙皮面内弹性模量小得多，芯材仅起增强结构刚度和承受横向剪应力作用。现在研究图 1 所示夹层壳体的位移及广义本构关系。

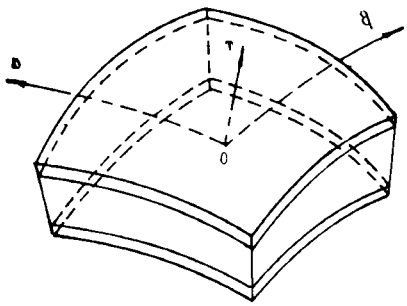

图 1 夹层板壳结构

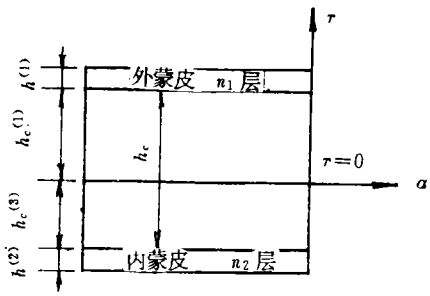

图 2 $h_c^{(1)}$、$h_c^{(2)}>>h^{(1)}$、$h^{(2)}$

根据以上结构特点，在考虑横向剪切变形下夹芯内任一点的位移为

$$u = u_0 + \gamma\varphi_\alpha,\ v = v_0 + \gamma\varphi_\beta,\ w = w_0 \tag{1}$$

其中 u_0、v_0、w_0 分别是坐标中面 α、β、γ 方向位移值，φ_α、φ_β 为夹芯内法线绕 α 和 β 轴的转角。

对于蒙皮，因相当薄，又位于结构表层，内部位移沿 γ 方向差别不大，为简化计算，假设为等值分布，等于夹芯边缘位移值，于是蒙皮内点的位移近似为

$$u^{(k)} = u_0 - (-1)^k h_c^{(k)}\varphi_\alpha,\ v^{(k)} = v_0 - (-1)^k h_c^{(k)}\varphi_\beta,\ w^{(k)} = w_0 \tag{2}$$

式中 $k=1$，2 分别表示外、内蒙皮。

根据壳体理论，可导出小变形情况下夹层板壳的内力和广义应变的关系

$$\left.\begin{aligned} N_p &= (Q_{pq}^{(1)} + Q_{pq}^{(2)})\varepsilon_{q0} + [h_c^{(1)}Q_{pq}^{(1)} - h_c^{(2)}Q_{pq}^{(2)}]K_q \\ M_p &= (h_c^{(1)}Q_{pq}^{(1)} - h_c^{(2)}Q_{pq}^{(2)})\varepsilon_{q0} + [(h_c^{(1)})^2Q_{pq}^{(1)} + (h_c^{(2)})^2Q_{pq}^{(2)}]K_q \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{10} &= \frac{1}{A}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}v_0 - \frac{w_0}{R_\alpha} \\ \varepsilon_{20} &= \frac{1}{B}\frac{\partial v_0}{\partial\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u_0 - \frac{w_0}{R_\beta} \\ \varepsilon_{60} &= \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v_0}{B}\right) + \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_0}{A}\right) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\varphi_\beta \\ K_2 &= \frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varphi_\alpha \\ K_6 &= \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\varphi_\beta}{B}\right) + \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\varphi_\alpha}{A}\right) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$Q_{pq}^{(k)} = b_{pq}^i t_i^{(k)} \tag{6}$$

式中 p，$q=1$，2，6，下标表示求和；N_p 和 M_p 分别是截面膜力和弯、扭矩；ε_{p0} 和 K_p 是中面应变和曲率的改变；b_{pq}^i 是各层蒙皮材料面内刚度系数；$t_i^{(k)}$ 表示内、外蒙皮第 i 层的厚度。

关于剪力与横向剪切应变之间的关系，因蒙皮很薄，忽略其横向剪切效应。由(1)式知芯材

的横向剪切应变为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_4 &= \gamma_{\beta\gamma} = \varphi_\beta + \frac{1}{B}\frac{\partial w_0}{\partial \beta} + \frac{v_0}{R_\beta}\\ \varepsilon_5 &= \gamma_{\alpha\gamma} = \varphi_\alpha + \frac{1}{A}\frac{\partial w_0}{\partial \alpha} + \frac{u_0}{R_\alpha}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

假设截面横向剪应力分布规律为[1]

$$\sigma_p(\alpha, \beta, \gamma) = f(\gamma)Q_p(\alpha, \beta) \qquad (p = 4, 5) \tag{8}$$

其中

$$f(\gamma) = \frac{3}{2h_c}\left[1 - \frac{4}{h_c^2}(\gamma - \frac{h_c}{2} + h_c^{(2)})^2\right] \tag{9}$$

所以壳体剪力与横向剪应变之间关系为

$$Q_p = \frac{5}{6}b_{pq}^{(c)}h_c\varepsilon_q \qquad (p, q) = (4, 5) \tag{10}$$

式中 $b_{pq}^{(c)}$ 是芯材刚度系数。

现在考虑一个各向异性材料单层壳体的位移和广义本构关系。对图 3 所示单层壳体，考虑横向剪切效应下壳体内任一点的位移为

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \gamma'\bar{\varphi}_{\alpha'},\ \bar{v} = \bar{v}_0 + \gamma\bar{\varphi}_{\beta'},\ \bar{w} = \bar{w}_0 \tag{11}$$

这里 $\bar{u}_0$、$\bar{v}_0$、$\bar{w}_0$ 是坐标面 $\alpha' o' \beta'$ 的 α'、β'、γ' 方向的位移值，$\bar{\varphi}_{\alpha'}$、$\bar{\varphi}_{\beta'}$ 为法线绕 α' 和 β' 轴的转角。

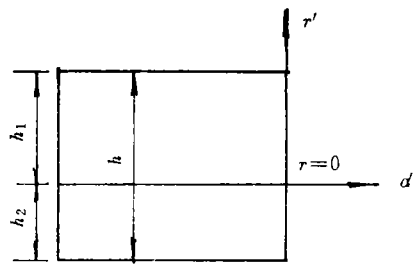

图 3　单层壳体

由壳体理论可得相应的内力与广义应变之间关系

$$\left.\begin{aligned}\bar{N}_p &= h\bar{b}_{pq}\bar{\varepsilon}_{q0} + \frac{h}{2}(h_1 - h_2)\bar{b}_{pq}\bar{K}_q\\ \bar{M}_p &= \frac{h}{2}(h_1 - h_2)\bar{b}_{pq}\bar{\varepsilon}_{q0} + \frac{h}{3}(h_1^2 - h_1h_2 - h_2^2)\bar{b}_{pq}\bar{K}_q\end{aligned}\right\} \quad (p, q) = 1, 2, 6) \tag{12}$$

$$\bar{Q}_p = \frac{5}{6}\bar{b}_{pq}h\bar{\varepsilon}_q \qquad (p, q = 4, 5) \tag{13}$$

上两式中广义应变 $\bar{\varepsilon}_{p0}$、$\bar{K}_p$ 和 $\bar{\varepsilon}_p$ 与中面位移 $\bar{u}_0$、$\bar{v}_0$、$\bar{w}_0$ 和转角 $\bar{\varphi}_{\alpha'}$、$\bar{\varphi}_{\beta'}$ 的关系类似式(4)、(5)和(7)，只需用 $\alpha' o' \beta'$ 曲面的拉密系数 $\bar{A}'$、$\bar{B}'$ 和曲率 $\frac{1}{\bar{R}_{\alpha'}}$、$\frac{1}{\bar{R}_{\beta'}}$ 替换即可。

比较式(1)～(10)和式(11)～(13)，若满足以下条件：

(1)夹层板壳结构与单层板壳结构具有相似的构形，且 $\alpha o \beta$ 曲面与 $\alpha' o' \beta'$ 曲面重合，即 $A = \bar{A}$，$B = \bar{B}$，$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{1}{\bar{R}_{\alpha'}}$ 和 $\frac{1}{R_\beta} = \frac{1}{\bar{R}_{\beta'}}$；

(2)两壳体具有相等的刚度，即

$$\left.\begin{aligned}&Q_{pq}^{(1)} + Q_{pq}^{(2)} = h\bar{b}_{pq}\\ &h_c^{(1)}Q_{pq}^{(1)} - h_c^{(2)}Q_{pq}^{(2)} = \frac{h}{2}(h_1 - h_2)\bar{b}_{pq}\\ &(h_c^{(1)})^2Q_{pq}^{(1)} + (h_c^{(2)})^2Q_{pq}^{(2)} = \frac{h}{3}(h_1^2 - h_1h_2 + h_2^2)\bar{b}_{pq}\end{aligned}\right\} \quad (p, q) = (1, 2, 6)$$

$$h_c b_{pq}^{(c)} = h\bar{b}_{pq} \qquad (p, q) = (4, 5)$$

或

$$\left.\begin{aligned} h\bar{b}_{pq} &= Q_{pq}^{(1)} + Q_{pq}^{(2)} \\ \frac{1}{2}(h_1 - h_2) &= [h_c^{(1)}Q_{pq}^{(1)} - h_c^{(2)}Q_{pq}^{(2)}]/(Q_{pq}^{(1)} + Q_{pq}^{(2)}) \\ \frac{1}{3}(h_1^2 - h_1h_2 + h_2^2) &= [(h_c^{(1)})^2Q_{pq}^{(1)} + (h_c^{(2)})^2Q_{pq}^{(2)}]/(Q_{pq}^{(1)} + Q_{pq}^{(2)}) \end{aligned}\right\} \quad (p, q = 1, 2, 6) \tag{14,a}$$

$$h\bar{b}_{pq} = h_c b_{pq}^{(c)} \qquad (p, q) = (4, 5) \tag{14,b}$$

则在相同的载荷作用下，二者中面位移、转角和内力均相等。或者说，由以上两条件，可将夹层壳体结构转换成一具有相似构形且等刚度的单层壳体结构——等效单层壳体进行求解。该等效壳体的材料常数由(14,a)式的第一式和(14,b)式确定，结构厚度由(14,a)式的第二式和第三式确定。

显然上述等效条件(1)是能自然实现的，但是条件(2)中(14,a)式中的第二、三式左端总共只有两个变量 h_1 和 h_2，而该两式共代表 18 个方程，一般情况下是不成立的，但考虑工程中常见的夹层板壳都是有规律铺层的，比如完全对称铺层，满足 $Q_{pq}^{(1)}=Q_{pq}^{(2)}$；又如材料对称铺层，即 $b_{pq}^{(1)}=b_{pq}^{(2)}$，若 $n_1=n_2=n$，且 $t_i^{(1)}=\frac{h^{(1)}}{n}$，$t_i^{(2)}=\frac{h^{(2)}}{n}$，有 $Q_{pq}^{(1)}/Q_{pq}^{(2)}=h^{(1)}/h^{(2)}$ 等情况下，右端材料常数量将消除，该两式所代表的方程缩减为二个，于是 h_1 和 h_2 将被唯一确定，所以等效规则成立。

3 等效单层壳体的有限元法及夹层壳体的应力求解

一般情况下，上述等效壳体得不到完全的解析解，为解决问题，最常用和最有效的方法是进行有限元分析。这里则选用一种变形协调的等参板壳单元[6]进行计算，该单元保留了 Kirchhoff 薄壳理论 $\sigma_t=0$ 假设，且假设变形前为直线的法线变形后仍保持为直线，但不要求仍垂直于壳中面，其单元内某点的位移表示为

$$u_i = \sum_{k=1}^{n} N_k[u_i^k + \frac{t}{2}h(-\theta_1^k v_{i1}^k + \theta_2^k v_{i2}^k)] \tag{15}$$

其中 u_i^k 是单元节点位移，θ_1^k 和 θ_2^k 是绕节点坐标轴 $\vec{v}_1^k$ 和 $\vec{v}_2^k$ 的转角，h 为壳厚。

式(15)写成矩阵形式 $\{u\}_e=[N]\{u^k\}_e$ (16)

根据虚功原理和有限元思想可建立结构的有限元方程：

$$[K]\{u^k\} = \{R^k\} \tag{17}$$

考虑到夹层壳体与等效壳体之间关系，式(17)的解也即是夹层壳体中面位移和转角解，再由式(1)～(5)便得到壳体内任一点的位移、应变和截面内力。

关于夹层壳体的应力，根据其结构特点，主要关心蒙皮内应力，采用下述两方式处理：

(1)已知蒙皮各层材料及铺层规律，由复合材料本构关系直接求蒙皮各单层的应力，在需要的情况下，还可反推出各层主方向的应力。显然此时应力具有分层均布特点，计算较精确。

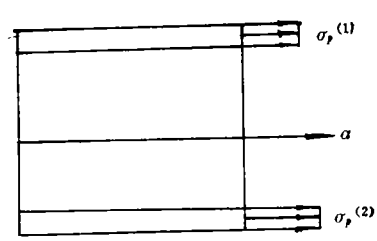

图 4 蒙皮应力沿厚度方向均布

(2)不详细区分蒙皮的铺层情况，仅计算蒙皮宏观应力分布规律。假设蒙皮应力沿厚度方向是均布的(图 4)，于是可得蒙皮应力与截面内力的关系

$$\left.\begin{aligned}\sigma_p^{(1)} &= [2(h_c^{(2)} + \frac{h^{(2)}}{2})N_p - M_p]/[h_c + (h^{(1)} + h^{(2)})/2] \\ \sigma_p^{(2)} &= [2(h_c^{(1)} + \frac{h^{(1)}}{2})N_p + M_p]/[h_c + (h^{(1)} + h^{(2)})/2]\end{aligned}\right\} \quad (p = 1, 2, 6) \qquad (18)$$

由此式可直接得到蒙皮的应力。虽然此时应力没有反映蒙皮的铺层情况及材料的差异，但是计算简单，具有较强的工程性。

4　算例及结果

本文对下述玻璃钢对称铺层内夹硬质泡沫塑料芯材的地下结构进行了实例计算。结构中面形式及尺寸如图 5 所示，其中上拱是长半轴为 1000 mm，短半轴为 500mm，长为 3000mm 的半椭圆柱壳板，图中还标明了实验应变片位置。结构截面尺寸及玻璃钢蒙皮铺层情况见图 6。

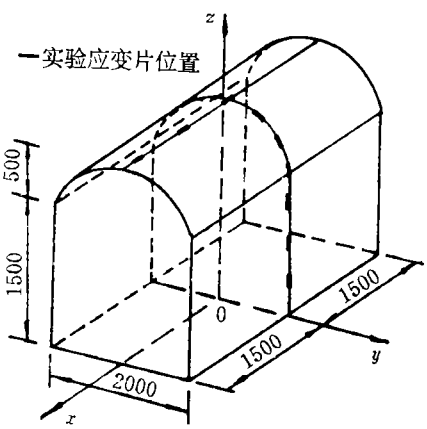

图 5　结构形状及尺寸

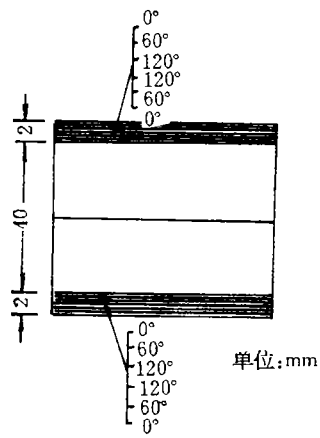

图 6　断面尺寸

玻璃钢单层主方向弹性常数：$E_L = E_T = 1.49 \times 10^4$MPa，$\nu_{LT} = \nu_{TL} = 0.14$，$G_{LT} = 0.26 \times 10^4$MPa。

泡沫塑料为各向同性材料，其弹性常数：$E_c = 30.9$MPa，$\nu_c = 0.5$

参照文献[7]，可推导该玻璃钢夹层板壳的刚度系数

$$\left.\begin{aligned}Q_{11}^{(k)} &= Q_{22}^{(k)} = h^m U_1,\ Q_{12}^{(k)} = Q_{21}^{(k)} = h^m U_4 \\ Q_{16}^{(k)} &= Q_{61}^{(k)} = Q_{26}^{(k)} = Q_{62}^{(k)} = 0,\ Q_{66}^{(k)} = h^m U_5\end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2) \qquad (19)$$

式中 $h^m = h^{(1)} = h^{(2)}$ 为蒙皮厚度，U_1、U_4、U_5 是蔡不变刚度。于是由式(14.a)有

$$\left.\begin{aligned}\bar{b}_{11} &= \bar{b}_{22} = \frac{2h^m}{\sqrt{3}\,h_c} U_1,\ \bar{b}_{12} = \bar{b}_{21} = \frac{2h^m}{\sqrt{3}\,h_c} U_4 \\ \bar{b}_{16} &= \bar{b}_{61} = \bar{b}_{26} = \bar{b}_{62} = 0,\ h_1 = h_2 = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} h_c\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

由此不难发现，等效壳体是各向同性材料单层壳，相应材料系数为

$$E = \frac{2h^m}{\sqrt{3}\,h_c}\left(\frac{U_1^2 - U_4^2}{U_1}\right),\ \nu = \frac{U_4}{U_1} \qquad (21)$$

且中面与夹层壳体的芯材中面重合。

为保证(14.b)所示剪切刚度相等，引入横向剪切因子 k：

$$k=\frac{G_C}{\sqrt{3}G} \tag{22}$$

这里 $G=\frac{E}{2(1+\nu)}$ 是等效壳体的剪切弹性模量。

将玻璃钢主方向弹性常数及泡沫塑料弹性常数代入便得等效壳体的材料和结构参数。

$E=0.682\times10^3$MPa，$\nu=0.31$，$h=70$mm，$k=0.023$

考虑到结构对称性，有限元计算取四分之一结构作为计算模型，计算载荷根据实测压力数据取为如图 7 所示。图 8 和图 9 是计算结果，分别给出了拱顶 x 方向的蒙皮表面应力和结构中断面处拱与侧墙蒙皮表面径向应力分布规律，图中还给出了相应实验值及直接有限元解，这里直接有限元是按[4]提出的多层板壳单元计算的，按内、外蒙皮和夹层三层板壳单元考虑。

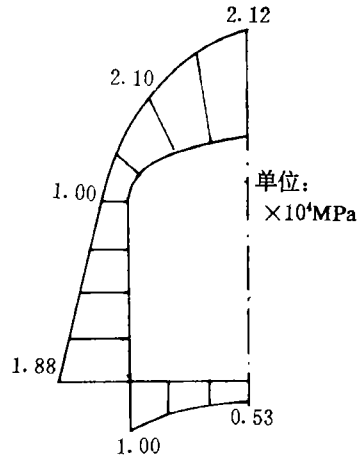

图 7 结构计算载荷

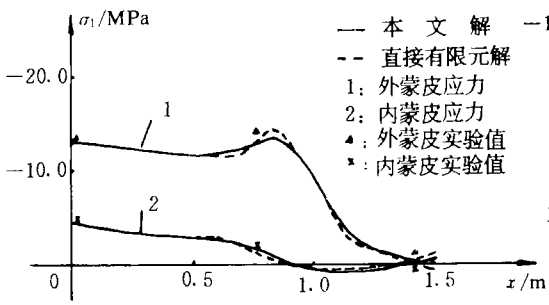

图 8 结构拱顶纵向(x 方向)内、外蒙皮应力分布规律

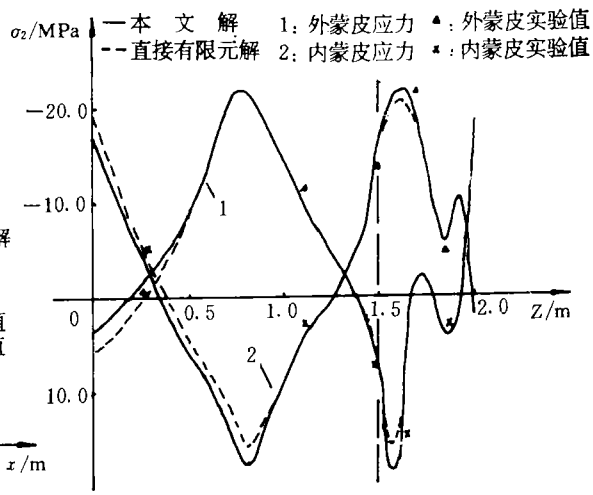

图 9 结构中断面($x=0$)径向内、外蒙皮应力分布规律

5 讨 论

(1)从图 8 和图 9 可以看出，本文方法的结果与直接有限元解吻合很好，大部分区域误差小于 5%，在构件相接部位，比如挡板与拱相接处(图 8)，侧墙与底板相接处(图 9)，误差略大，但仍小于 15%，且与实验结果基本一致，说明本文方法是可行的，精度满足工程实际要求。

(2)等效分析的计算比直接有限元省时且节约内存，在 VAX-Ⅱ 机上上述问题仅需三分钟左右，为直接有限元机时的三分之一，内存不到二分之一。显然当复合材料夹层板壳层数越多时，等效方法的优势就越突出。

本文实例虽然具有一定的特殊性，但计算方法对工程中常见的一些复合材料夹层板壳结构仍是适用的。

参 考 文 献

1 刘国琴、王震鸣. 复合材料夹层扁壳的有限挠度方程和线性稳定问题. 固体力学学报，1984；(1)：64－76

2 叶开源，邓梁波. 复合材料层合板的分析. 应用数学和力学，1988；(14)：287－295

3 Pryor Jr C W and Barker R M. A finite-element analysis including transverse shear effects for applications to laminated plates. AIAA J 1971；(5)：912－917

4 Chang T Y and Sawomiphadi K. Large deformation analysis to laminated shells by finite method. Comp & Struct，1981；(13)：331－340

5 Spilker R L. Hrbrid-Stress eight-rode elemwnts for thin and thick multilayer laminated plates. Int J Num Mech Engng，1982；(18)：801－828

6 Bathe K J and Ho L W. A simple and effective element for analysis of general shell structures. Comp & Struct，1981；(13)：673－681

7 刘锡礼等. 玻璃钢产品设计. 哈尔滨科学出版社，1985

AN EQUIVALENT ANALYSIS METHOD FOR SANDWICH SHELLS OF COMPOSITE MATERIALS

Yan Luhui　Zeng Shouyi　Chen Bin　Wen Shuchun

(Changsha Academy of Military Engineering，Changsha 410072)

Abstract　An equivalent analysis method for sandwich shells made of composite materials is studied. The formulae of the intenal forces and displacements of the sandwich shell are deduced from the shell theory，and by comparing the formulae with those of a single-deck anisotropic shell the equivalent conditions are given for both shells. Therefore，the mechanic analysis of the sandwich shell can be converted to the analysis of a single-deck equivalent anisotropic shell that is easy to solve by finite element method. At last an engineering example is computed. The results confirm the validity of this method.

Key words　composite materials，sandwich plates and shells，equivalent analysis method

《复合材料学报》征订通知

1995 年仍由编辑部发行，参加联合征订，新老用户可向联合征订单位去信联系并办理订阅手续。除合订本外，编辑部不再办理订阅手续。

联合征订地址：① 300220　天津市 412 信箱　半导体杂志社

② 100037　北京市百万庄路 22 号　周恒林

1995 年全年订价为 28 元，如有增刊不另收费。

1995 年起合订本为 40 元。过期刊仅有合订本，不保留单本。

本刊地址：(100083) 北京航空航天大学复合材料学报编辑部

电　　话：2017251—7541

订购合订本或补订学报者，可直接汇款至编辑部办理。