第 12 卷 第 1 期 复 合 材 料 学 报 Vol. 12 No. 1
1995 年 2 月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Feb. 1995

复合材料夹层板的大挠度分析

唐 俊 高 磊
（大连理工大学工程力学研究所，大连 116023）

摘 要 本文构造一个复合材料夹层板矩形九节点单元，并应用于对称复合材料夹层板的大挠度分析，并讨论边界条件、夹心剪切模量以及面板和夹心厚度比对复合材料夹层板大挠度的影响，得到一些有意义的结论。

关键词 复合材料、夹层板、大挠度

1 前 言

夹层结构是由两块高强度的面板和在两块面板之间，用以保证两块面板共同工作的软而轻的夹心所组成的一种组合型材料形成的结构。由于这种结构具有比刚度、比强度高等突出特点，因而受到实际应用和理论研究者广泛的重视。近年来，随着复合材料的发展和应用，以复合材料层合板为面板的夹层结构也已得到日益增多的应用和研究。Reissner[1]首先建立了软夹心、具有极薄表板的夹层板理论，Kamiya[2]研究了对称复合材料夹层板的大挠度问题，刘人怀[3,4]求解了圆夹层板在不同的边界条件下的大挠度近似解，Rajagopal 等[5,6]以有限元法研究了非对称夹层板的非线性静、动力特性。

目前，对夹层板的几何非线性解，除了少数情况求得解析解外，用有限元法进行的研究还不多，尤其对复合材料夹层板的研究还很不够，本文基于 Reissner 理论，用有限元法讨论复合材料夹层板的大挠度问题，分析了边界条件、夹心剪切模量以及夹心和面板厚度比对夹层板几何非线性效应的影响，得出一些有实际意义的结论。

2 基本公式

2.1 夹层板模型

将 Reissner 的夹层板理论推广用于复合材料夹层板，假设[7]：

(1)面板很薄，应变沿面板厚度均匀分布，忽略面板本身的抗弯刚度。

(2)由于夹心较软，忽略平行于夹心中面的夹心应力分量，即假定夹心中 $\sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=0$。

(3)限于考虑反对称变形，令夹心中 $\varepsilon_z=0$，同时假定 σ_z 很小，可忽略其对变形的影响。

令上下面板对称，h 及 t 为夹心及面板的厚度，则夹层板内力素为

$$\{\bar{\sigma}\}=\{N_x \quad N_y \quad N_{xy} \quad M_x \quad M_y \quad M_{xy} \quad Q_x \quad Q_y\}^T \tag{1}$$

$$\{N\}=\{N_x \quad N_y \quad N_{xy}\}^T=[D_P]\{\varepsilon_P\} \tag{2}$$

本文于 1994 年 2 月 6 日收到修改稿，1993 年 6 月 21 日收到初稿，船舶工业国防科技应用基础研究基金资助项目

$$\{M\} = \{M_x \quad M_y \quad M_{xy}\}^T = [D_b]\{\varepsilon_b\} \tag{3}$$

$$\{Q\} = \{Q_x \quad Q_y\}^T = [D_s]\{\varepsilon_s\} \tag{4}$$

$$[D_p] = 2[A_{ij}] \tag{5}$$

$$[D_b] = \frac{1}{2}(h+t)^2[A_{ij}] \tag{6}$$

式中$\{\varepsilon_p\}$、$\{\varepsilon_b\}$及$\{\varepsilon_s\}$分别为膜向、弯曲及剪切应变阵，$[A_{ij}]$为面板的拉伸刚度，$[A_{ij}]$及$[D_s]$的计算可参见[8]。

2.2 有限元离散

Hughes[9]等人建立的九节点"Heterosis"元(图 1)是一种基于 Mindlin 板理论的高精度板单元。本文将其推广应用于夹层板的几何非线性分析，单元节点位移未知数为

$$\{\delta_i\} = \{u_i \quad v_i \quad w_i \quad -\theta_{xi} \quad -\theta_{yi}\}^T \tag{7}$$

式中 u、v、w 为节点沿 x、y、z 向的位移，θ_x、θ_y 为夹心中面法线绕 y 轴及 x 轴的转角。令

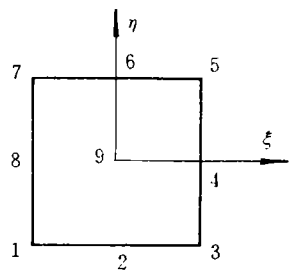

图 1

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{9} N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^{9} N_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^{9} N_i w_i \\ \theta_x &= \sum_{i=1}^{9} N_i \theta_{xi}, \quad \theta_y = \sum_{i=1}^{9} N_i \theta_{yi} \end{aligned} \tag{8}$$

形函数 N_i 为

$$\begin{aligned} N_i &= (1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1)/4 \qquad (i=1,3,5,7) \\ N_i &= \frac{1}{2}\xi_i^2(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2) + \frac{1}{2}\eta_i^2(1+\eta\eta_i)(1-\xi^2) \qquad (i=2,4,6,8) \\ N_9 &= (1-\xi^2)(1-\eta^2) \end{aligned} \tag{9}$$

参照"Heterosis"元，节点 9 的自由度仅 θ_x、θ_y，其余三个自由度均约束为零，即 $u_9=v_9=w_9=0$。

2.3 大挠度方程

由板的大挠度理论知板的应变

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon_L\} \tag{10}$$

式中

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_0\}^T &= \{\varepsilon_0^p \quad \varepsilon_0^b\} \\ \{\varepsilon_L\}^T &= \{\varepsilon_L^p \quad 0\} \\ \{\varepsilon_0^p\} &= \{u_{,x} \quad v_{,y} \quad u_{,y} + v_{,x}\}^T \\ \{\varepsilon_0^b\} &= \{\theta_{x,x} \quad \theta_{y,y} \quad \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}^T \\ \{\varepsilon_L^p\} &= \{\frac{1}{2}w_{,x}^2 \quad \frac{1}{2}w_{,y}^2 \quad w_{,x}w_{,y}\}^T \end{aligned} \tag{11}$$

如果将应变与节点位移的关系写成增量形式，令

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\{\varepsilon\} &= [B]\mathrm{d}\{\delta\} \\ \mathrm{d}\{\varepsilon_0\} &= [B_0]\mathrm{d}\{\delta\} \\ \mathrm{d}\{\varepsilon_L\} &= [B_L]\mathrm{d}\{\delta\} \end{aligned} \tag{12}$$

$$[B_0] = \begin{bmatrix} B_0^p & 0 \\ 0 & B_0^b \end{bmatrix}, [B_L] = \begin{bmatrix} 0 & B_L^b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

式中$[B_0^\delta]$、$[B_0^\psi]$是按线性分析得到的标准矩阵，$[B_L^\psi]$则是由于应变的非线性项引起的。

几何非线性问题的一般平均方程可写为

$$\{\psi(\delta)\} = \int [\overline{B}]^T \{\sigma\} dv - \{F\} = 0 \tag{14}$$

式中$\{F\}$代表载荷列阵。若将上式两边对位移变分，则得增量形式的平衡方程：

$$d\{\psi\} = \int (d[\overline{B}]^T \{\sigma\} + [\overline{B}]^T d\{\sigma\}) dv - d\{F\} = 0 \tag{15}$$

将弹性本构关系

$$d\{\sigma\} = [D] d\{\varepsilon\} = [D][\overline{B}] d\{\delta\} \tag{16}$$

代入，并将$[\overline{B}]$分解为线性项$[B_0]$和非线性项$[B_L]$，则式(15)可写为

$$d\{\psi\} = [K_T] d\{\delta\} - d\{F\} \tag{17}$$

式中

$$[K_T] = [K_0] + [K_L] + [K_\sigma] \tag{18}$$

$$[K_0] = \int [B_0]^T [D][B_0] dv \tag{19}$$

$$[K_L] = \int ([B_0]^T [D][B_L] + [B_L]^T [D][B_0] + [B_L]^T [D][B_L] dv$$

$$[K_\sigma] d\{\delta\} = \int d[B_L]^T \{\sigma\}) dv \tag{20}$$

$[K_T]$即单元的切线刚度阵，$[K_0]$、$[K_L]$$[K_\sigma]$分别为单元的线性刚度矩阵、大位移矩阵和初应力矩阵。

非线性方程的求解采用将载荷分成若干增量步，每一增量步上利用 Newton-Raphson 方法求解。采用位移收敛准则，本文计算程序中给出了最大位移、位移算术平均值及几何平均值几种准则[10]。

3 数值例题及讨论

3.1 验证计算程序的可靠性

计算下列例题：

(1)线性弯曲问题

Khatua 等[11]计算了四边简支方夹层板承受均布横向载荷时的最大挠度，该文取四分之一板计算，所得计算结果见表 1。本文亦取四分之一板并以 2×2 网格计算，所得板的最大挠度为 $w_{max}=0.0012208$。与表 1 的结果比较可以看出，此计算结果已很接近级数解

表 1 Khatua 等计算的最大挠度

网 格	2×2	4×4	6×6	8×8	级 数 解
w_{max}	0.001101	0.001190	0.001207	0.001213	0.001226

(2)非线性问题

a 各向同性材料方板，其跨厚比 $A/h=100$，材料参数 $E=206$GPa，$\nu=0.25$，承受均布载 q(N/m²)，表 2 中给出本文取四分之一板、以 2×2 网格计算所得与文[12]以解析法计算所得最大挠度与板厚比之结果的比较。板的四边边界条件取 $S1$ 简支。

b 各向同性材料周边固支圆夹层板，其半径 25.4 cm，面板厚度 0.07 cm，材料参数 $E_f=$

68.95GPa,$\nu=0.3$。夹心厚 $h=1.9$ cm,材料参数 $G=0.21$GPa,承受均布载荷 $\bar{q}$(kPa)。表 3 给出本文与文[7]用摄动法计算所得结果的比较(表中 $q=\bar{q}/6.895$ kPa),本文结果是取四分之一板划分 12 个单元计算所得。

表 2　w/h 的比较

$q/10^5$	线性解	非线性解				
	0.2	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
本　文	0.4329	0.3650	0.5834	0.7321	0.8461	0.9394
解析解	0.435	0.380	0.600	0.744	0.850	0.94

表 3　固支圆夹层板 w_{max}/h 计算结果

q	100	200	300	400	500
本　文	0.3428	0.6330	0.8780	1.0741	1.2453
文　[7]	0.344	0.635	0.880	1.074	1.245

由以上几个例题计算所得与解析解及文献中计算结果的比较可以看出,本文所用单元对大挠度分析具有相当好的精度,本文以下通过数值计算分别讨论夹层板边界条件及板的物理、几何参数对非线性问题的影响。

3.2　边界条件的影响

为了讨论边界条件的影响,对不同边界条件约定如表 4。

设各向同性夹层板其边长 $A=50.8$ cm,面板厚 $t=0.06$ cm,波松比 $\nu=0.3$,弹性模量 $E=72$GPa,夹心厚 $h=1.713$ cm,剪切模量 $G_C=0.04$GPa,承受均布横向载荷 $\bar{q}$(kPa),板四边边界条件相同,取四分之一板以 2×2 网格计算,在不同边界条件下所得最大挠度与夹心厚之比见表 5,图 2 中给出不同边界条件下非线性解及线性解挠度之比随 q 的变化(表 5 及图 2 中 $q=\bar{q}/6.859$ kPa)。

表 4　边界条件的约定

$S1$	$w=0$	$M_n=0$	$\theta_t=0$	$u_n=0$	$u_t=0$
$S2$	$w=0$	$M_n=0$	$\theta_t=0$	$u_n=0$	$u_t=0$
C	$w=0$	$M_n=0$	$\theta_t=0$	$u_n=0$	$u_t=0$

表 5　不同边界条件时的 w_{max}/h

q	线性解	非线性解				
	50	50	150	250	350	450
$S1$	0.17266	0.1631	0.3880	0.5294	0.6333	0.7165
$S2$	0.17266	0.1697	0.4605	0.6815	0.8552	0.9980
C	0.1452	0.1443	0.4141	0.6468	0.8451	1.0162

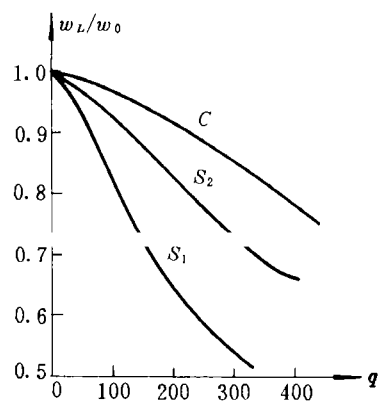

图 2　挠度比随均布载荷 q 的变化

由计算结果可以看出,膜向边界约束的增强将使几何非线性的影响增大,即非线性挠度解 w_L 与线性挠度解 w_0 之比值减小,这个结论与文[10]所得是一致的。

3.3　夹心剪切模量的影响

仍取各向同性材料夹层方板受均布载荷 $\bar{q}$(kPa)计算,板边长 25.4 cm,面板厚 $t=0.063$ cm,弹性模量及泊松比分别为 $E=72$GPa、$\nu=0.3$,夹心厚 $h=1.713$ cm,表 6 及表 7 分别给出了 C 边界及 $S1$ 边界下不同夹心剪切模量 G_C 值时计算所得最大挠度与夹心厚度的比值 w/h,图 3 及图 4 给出了相应曲线(上述图及表中 $q=\bar{q}/6.3895$ kPa),由图中可明显看出:

(1)当 G_C 较小(软夹心)时,非线性挠度解与线性解相差很大,随 G_C 的增大,几何非线性的影响降低,当 G_C 大到一定程度时,非线性解即接近线性解。

表 6 G_c 对 w/h 的影响(C 边界)

(G_c 单位:10^2TPa)

w/h \ G_c / q	1.03	2.07	4.14	6.21	10.34
50(线性解)	0.4979	0.2561	0.1352	0.0948	0.0625
50	0.4105	0.2465	0.1343	0.0946	0.0625
150	0.8432	0.6233	0.3855	0.2790	0.1863
350	1.2753	1.0805	0.7868	0.6081	0.4238
450	1.4223	0.2399	0.9461	0.7509	0.5353

表 7 G_c 对 w/h 的影响($S1$ 边界)

(G_c 单位:10^2TPa)

w/h \ G_c / q	1.03	2.07	4.14	6.895	13.79	34.48
50(线性解)	0.5230	0.2822	0.1607	0.1124	0.0761	0.0541
50	0.2966	0.2276	0.1519	0.1101	0.0756	0.0541
150	0.4964	0.4424	0.3612	0.2933	0.2169	0.1596
350	0.6956	0.6546	0.5896	0.5273	0.4378	0.3477
450	0.7647	0.7269	0.6671	0.6090	0.5223	0.4282

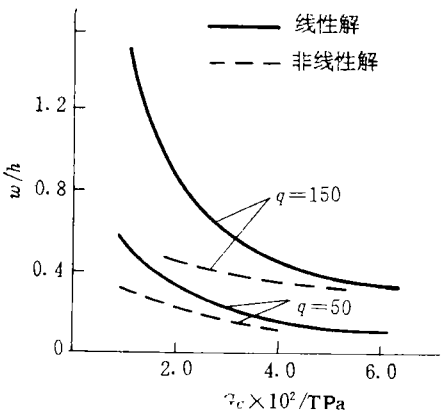

图 3 G_c 对 w/h 的影响($S1$ 边界)

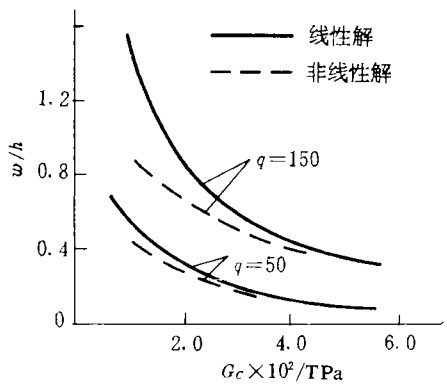

图 4 G_c 对 w/h 的影响($S1$ 边界)

(2)G_c 对非线性解的影响与边界条件有关,$S1$ 边界的非线性影响大于 C 边界。

(3)G_c 的变化对挠度影响明显,尤其对软夹心更为明显,同时,对线性挠度解的影响大于对非线性解的影响。

3.4 面板和夹心厚度比的影响

表 8 不同 t/h 时的 w/h 值

边 界	q \ t/h	0.05	0.1	0.15	0.2	0.5
$S2$	0.025*	0.03013	0.02816	0.02734	0.02678	0.02419
	0.025	0.03009	0.02811	0.02728	0.02671	0.02411
	0.050	0.060	0.05595	0.05424	0.05306	0.04781
$S1$	0.1*	0.1205	0.1126	0.1094	0.1071	0.0968
	0.1	0.1139	0.1040	0.0992	0.0959	0.0846
	0.125	0.1388	0.1255	0.1191	0.1148	0.1005
	0.15	0.1619	0.1453	0.1371	0.1317	0.1148
C	0.1*	0.1091	0.1059	0.1042	0.1026	0.0934
	0.1	0.1083	0.1046	0.1025	0.1007	0.0912
	0.125	0.1348	0.1299	0.1271	0.1247	0.1126
	0.15	0.1610	0.1547	0.1511	0.1480	0.1333

说明 ① 带"*"行之数值为线性值;

② 表中 $q=\dfrac{\bar{q}}{E_f}\left(\dfrac{A}{h}\right)^4$;

③ 此例之方板与夹心厚之比 $A/h=5$,面板弹性模量与夹心剪切模量比为 350,面板 $\nu=0.3$,夹心厚 $h=5.08$ cm。

表 8 中给出各向同性材料夹层方板在不同边界条件下受均布横向载 $\bar{q}$(MPa)作用下的计算结果,从计算结果可以看出,随着面板和夹心厚度比 t/h 的增大,挠度的线性解及非线性解均减小,非线性解与线性解的比值亦减小。

4 结　论

(1)本文基于"Heterosis"元构造的夹层板矩形元,用于夹层板大挠度分析,有良好的收敛性和精度。

(2)膜向边界约束条件的增强,将使几何非线性的影响增大。

(3)夹心剪切模量降低,使几何非线性影响增大。

(4)面板与夹心厚度比增大,使几何非线性影响增大。

参 考 文 献

1 Reissner E. Finit deflection of sandwich plate. J Aero Sci, 1948; 15(7): 435－440

2 Kamiya N. Governing equations for large deflection of sandwich plates. AIAA J, 1976; 14: 250－253

3 刘人怀,施云方. 夹层圆板大挠度问题的精确解. 应用数学和力学, 1982; 3(1): 11－23

4 刘人怀. 夹层圆板的非线性分析. 应用数学和力学, 1981; 2(2): 173－190

5 Rajagopal S V *et al*. Non-linear analysis of sandwich plates. Int J Non-linear Mechanics, 1987; 22(2): 161－172

6 Rajagopal S V *et al*. Large-deflection and nonlinear vibration of multilayered sandwich plates. AIAA J, 1987; 25(1): 130－133

7 中国科学院力学所. 夹层板壳的弯曲、稳定和振动. 北京: 科学出版社, 1977

8 Jones R M. Mechanics of composite materials. New York: McGraw-Hill, 1975

9 Hughes T J R, Cohen M. The "Heterosis" finit element for plate bending. Computer & Structures, 1978; 9: 445－450

10 朱菊芬, 汪　海. 大挠度层合板的拟协调罚单元. 复合材料学报, 1989; (6)4: 39－47

11 Khatua T P, Cheung Y K. Bending and vibration of multilayer sandwich beams and plates. Int J for Num Meth in Eng, 1973; 6(1): 11－24

12 沃耳密尔 A C. 柔韧板与柔韧壳. 北京: 科学出版社, 1959

LARGE DEFLECTION ANALYSIS OF COMPOSITE SANDWICH PLATES

Tang Jun　　Gao Lei

(Dalian University of Technology, Dalian 116023)

Abstract　In this paper a nine-mode rectangle element of composite sandwich plate is developed and applied to the large deflection analysis of symmetric composite sandwich plates. The effects of boundary conditions, shear moduli of core and the thickness ratio between the core and the faceplates on solution of large deflection are discussed. Some meaningful results are obtained.

Key words　composite materials, sandwich plate, large deflection