第 12 卷 第 1 期 复 合 材 料 学 报 Vol. 12 No. 1
1995 年 2 月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Feb. 1995

考虑横向剪切变形的反对称角铺设层合板的弯曲

张智舟 何积范
(清华大学工程力学系，北京 100084)

摘 要 本文对考虑横向剪切变形的反对称角铺设复合材料层合板弯曲问题进行了理论分析，得到了简化分层理论的封闭形式解。在由位能变分原理得到一般方程的基础上引入合理假设，得到了适合本问题的求解方程。在用简化的分层理论对典型算例进行数值计算的同时，也用经典层合板理论和一阶剪切变形理论进行了计算，一并与相关文献的三维精确解加以比较，结果表明，简化分层理论可以有效地应用于反对称角铺设层合板的弯曲问题。

关键词 层合板，弯曲，反对称角铺设，剪切变形

1 引 言

与常规材料相比，复合材料具有比强度高、比刚度大和可设计性好等一系列优点，应用广泛[1]。复合材料层合板层间剪切刚度和剪切强度远低于面内量，因此必须考虑剪切变形的影响。

对于反对称角铺设层合板的弯曲问题，基于 Kirchoff 假设的经典层合板理论[2,3]计算简单，但由于不考虑横向剪切变形，对小跨厚比问题误差明显。一阶剪切变形理论[4,5]对横向位移计算精度有较大提高，但对应力计算改进不大。为克服以上不足，又有人提出高阶理论[6,7]和逐层近似的分层理论[8~10]。分层理论可更好地模拟层合板弯曲后横截面的翘曲，从而使精度提高，但其未知量个数与层数有关，层数越多计算量越大。何积范等[11]提出一种简化分层理论，减少未知量，方便工程应用，但限于数学上的困难，仅求得了正交铺设条件下的封闭解。此外，有人运用复杂的数学工具，得到了反对称层合板弯曲问题的三维变分解[12]，特定条件下，还被证明是三维精确解。但其计算过繁，实际应用受到很大限制。

本文则基于简化分层理论，研究了考虑横向剪切影响的反对称角铺设矩形层合板的弯曲问题，并求得了此情况下的封闭解。同时本文对多种算例运用不同理论进行数值计算，结果表明，简化分层理论可有效地应用于反对称角铺设层合板弯曲问题。

2 理论分析

研究一块由 $2N$ 层正交各向异性材料组成的矩形层合平板，如图 1 所示。

本文于 1994 年 9 月 7 日收到修改稿，1994 年 7 月 23 日收到初稿

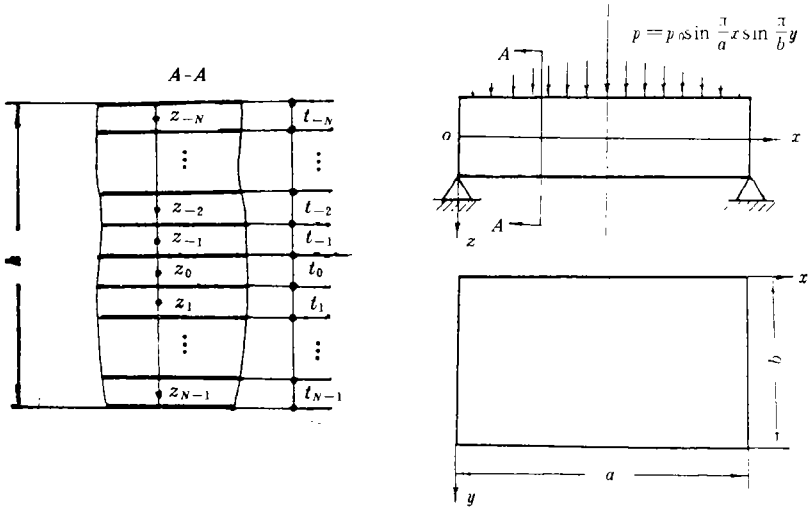

图 1 层合板的几何尺寸与载荷分布

层合板的边界条件为四边简支，并承受双正弦分布的横向载荷 $P=p_0\sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y$。

2.1 基本假设

假设各层的面内位移沿厚度方向呈线性变化，横向位移沿厚度方向为常量，则第 i 层位移可表示为

$$\left.\begin{aligned} U^{(i)}(x,y,z) &= U_m^{(i)}(x,y)+(z-z_i)\Psi_x^{(i)}(x,y)\\ V^{(i)}(x,y,z) &= V_m^{(i)}(x,y)+(z-z_i)\Psi_y^{(i)}(x,y)\\ W^{(i)}(x,y,z) &= W(x,y)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中 $U_m^{(i)}$、$V_m^{(i)}$、$\Psi_x^{(i)}$、$\Psi_y^{(i)}$ 为第 i 层中面两个方向的面内位移和法线转角，W 为层合板几何中面的横向位移。

由于板内实际的横向剪应力在层间是连续的，故假设各层剪应变之间彼此线性相关，并用第 0 层剪应变 $\gamma_{zx}^{(0)}$、$\gamma_{yz}^{(0)}$ 表示第 i 层的剪应变 $\gamma_{zx}^{(i)}$、$\gamma_{yz}^{(i)}$ 如下：

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{zx}^{(i)} &= \lambda_{11}^{(i)}\gamma_{zx}^{(0)}+\lambda_{12}^{(i)}\gamma_{yz}^{(i)}\\ \gamma_{yz}^{(i)} &= \lambda_{21}^{(i)}\gamma_{zx}^{(0)}+\lambda_{22}^{(i)}\gamma_{yz}^{(i)}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中 $\lambda_{rs}^{(i)}(rs=11,22,12,21)$ 均为常数，但对应不同层其值不同。

应用以上假设，并要求各层的面内位移在交界面上保持连续，由递推法可知任一层的位移均可由第 0 层的位移和转角函数，即 $U_m^{(0)}$、$V_m^{(0)}$、W、$\Psi_x^{(0)}$ 和 $\Psi_y^{(0)}$ 表示如下：

$$\left.\begin{aligned} U^{(i)} &= U_m^{(0)}+(z-z_i)\left[\lambda_{11}^{(i)}\Psi_x^{(0)}+\lambda_{12}^{(i)}\Psi_y^{(0)}-(1-\lambda_{11}^{(i)})\frac{\partial W}{\partial x}+\lambda_{12}^{(i)}\frac{\partial W}{\partial y}\right]+\\ &\quad\left[z_0+s(i)t_{11}^{(i)}\right]\Psi_x^{(0)}+s(i)t_{12}^{(i)}\left(\Psi_y^{(0)}+\frac{\partial W}{\partial y}\right)-\left[z_i-z_0-s(i)t_{11}^{(i)}\right]\frac{\partial W}{\partial x}\\ V^{(i)} &= V_m^{(0)}+(z-z_i)\left[\lambda_{22}^{(i)}\Psi_y^{(0)}+\lambda_{21}^{(i)}\Psi_x^{(0)}-(1-\lambda_{22}^{(i)})\frac{\partial W}{\partial x}+\lambda_{21}^{(i)}\frac{\partial W}{\partial x}\right]+\\ &\quad\left[z_0+s(i)t_{22}^{(i)}\right]\Psi_y^{(0)}+s(i)t_{21}^{(i)}\left(\Psi_x^{(0)}+\frac{\partial W}{\partial x}\right)-\left[z_i-z_0-s(i)t_{22}^{(i)}\right]\frac{\partial W}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

式中

$$t_{rs}^{(i)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\delta_{rs}t_0+\sum\limits_{k=1}^{i-1}\lambda_{rs}^{(k)}t_k+\dfrac{1}{2}\lambda_{rs}^{(i)}t_i & (i>0)\\ \dfrac{1}{2}\delta_{rs}t_0+\sum\limits_{k=i+1}^{-1}\lambda_{rs}^{(k)}+\dfrac{1}{2}\lambda_{rs}^{(i)}t_i & (i<0)\end{cases} \tag{4}$$

$(rs=11,\ 22,\ 12,\ 21)$

$$\delta_{rs}=\begin{cases}1 & r=s\\ 0 & r\neq s\end{cases} \tag{5}$$

$$s(i)=\begin{cases}1 & (i>0)\\ 0 & (i=0)\\ -1 & (i<0)\end{cases} \tag{6}$$

2.2 基本方程

应用位能变分原理得到平衡方程，并用 $U_m^{(0)}$、$V_m^{(0)}$、W、$\Psi_x^{(0)}$ 和 $\Psi_y^{(0)}$ 表示为

$$\begin{bmatrix}L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15}\\ L_{12} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25}\\ L_{13} & L_{23} & L_{33} & L_{34} & L_{35}\\ L_{14} & L_{24} & L_{34} & L_{44} & L_{45}\\ L_{15} & L_{25} & L_{35} & L_{45} & L_{55}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_m^{(0)}\\ V_m^{(0)}\\ W\\ \Psi_x^{(0)}\\ \Psi_y^{(0)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ p(x,\ y)\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \tag{7}$$

其中 L_{ij} 为微分算子，其表达式见附录 1。

采用以下简支边界条件：

$$\left.\begin{aligned}x=0,\ a\qquad & U_m^{(0)}=N_{xy}=W=M_x'=M_x''=\Psi_y^{(0)}=0\\ y=0,\ b\qquad & V_m^{(0)}=N_{xy}=W=M_y'=M_y''=\Psi_x^{(0)}=0\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

其中 N_{xy}、M_x'、M_x''、M_y' 和 M_y'' 分别为广义内力，分别对应广义变形 $\left(\dfrac{\partial U_m^{(0)}}{\partial x}+\dfrac{\partial V_m^{(0)}}{\partial y}\right)$、$\dfrac{\partial \Psi_x^{(0)}}{\partial x}$、$-\dfrac{\partial^2 W}{\partial x}$、$\dfrac{\partial \Psi_y^{(0)}}{\partial y}$、$-\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}$。

为求解问题，设

$$\left.\begin{aligned}U_m^{(0)}(x,\ y)&=u\sin\frac{\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{b}y\\ V_m^{(0)}(x,\ y)&=v\cos\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y\\ W(x,\ y)&=w\sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y\\ \Psi_x^{(0)}(x,\ y)&=\psi_x\cos\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y\\ \Psi_y^{(0)}(x,\ y)&=\psi_y\sin\frac{\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{b}y\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中 u、v、w、ψ_x 和 ψ_y 为待定常数。

将方程(9)代入方程(7)，合并同类项，并用矩阵形式表示为

$$\boldsymbol{LU}=\boldsymbol{Q} \tag{10}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{U}&=\{u\quad v\quad w\quad \psi_x\quad \psi_y\}^T\\ \boldsymbol{Q}&=\{0\quad 0\quad p_0\quad 0\quad 0\}^T\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

为了得到封闭解，根据反对称角铺设层合板剪应力的特点，进一步假设：

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{11,22}^{(i)}&=\lambda_{11,22}^{(-i,-1)}\\ \lambda_{12,21}^{(i)}&=-\lambda_{12,21}^{(-i,-1)}\end{aligned}\right\}\quad (i=1,\cdots,N-1)\tag{12}$$

则全部边界条件得以满足。

$\lambda_{rs}^{(i)}(rs=11,22,12,21)$需满足的方程也由位能变分原理得到，表达如下：

$$\sum_{j=1}^{N-1}\begin{bmatrix}c_{1111}^{(kj)}+c_{1111}^{(k'j')} & c_{1122}^{(kj)}+c_{1122}^{(k'j')} & c_{1112}^{(kj)}+c_{1112}^{(k'j')} & c_{1121}^{(kj)}+c_{1121}^{(k'j')}\\ c_{2211}^{(kj)}+c_{2211}^{(k'j')} & c_{2222}^{(kj)}+c_{2222}^{(k'j')} & c_{2212}^{(kj)}+c_{2212}^{(k'j')} & c_{2221}^{(kj)}+c_{2221}^{(k'j')}\\ c_{1211}^{(kj)}+c_{1211}^{(k'j')} & c_{1222}^{(kj)}+c_{1222}^{(k'j')} & c_{1212}^{(kj)}+c_{1212}^{(k'j')} & c_{1221}^{(kj)}+c_{1221}^{(k'j')}\\ c_{2111}^{(kj)}+c_{2111}^{(k'j')} & c_{2122}^{(kj)}+c_{2122}^{(k'j')} & c_{2112}^{(kj)}+c_{2112}^{(k'j')} & c_{2121}^{(kj)}+c_{2121}^{(k'j')}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_{11}^{(j)}\\ \lambda_{22}^{(j)}\\ \lambda_{12}^{(j)}\\ \lambda_{21}^{(j)}\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}d_{11}^{(k)}+d_{11}^{(k')}+c_{1111}^{(k',-1)}+c_{1122}^{(k',-1)}\\ d_{22}^{(k)}+d_{22}^{(k')}+c_{2211}^{(k',-1)}+c_{2222}^{(k',-1)}\\ d_{12}^{(k)}+d_{12}^{(k')}+c_{1211}^{(k',-1)}+c_{1222}^{(k',-1)}\\ d_{21}^{(k)}+d_{21}^{(k')}+c_{2111}^{(k',-1)}+c_{2122}^{(k',-1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\quad (k=1,\cdots,N-1)\tag{13}$$

式中 $k'=-k-1$，$j'=-j-1$。 (14)

系数$c_{rspq}^{(kj)}$、$d_{rs}^{(k)}$的具体表达式参见附录 2。也可将式(13)写成矩阵形式如下：

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}\tag{15}$$

2.3 求解方法

将方程(10)和(15)联立并迭代求解。先设定λ_{rs}的初值，求出方程(10)中矩阵$\boldsymbol{L}$的各元素，解方程(10)得到列阵$\boldsymbol{U}$，代入方程(15)的矩阵$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$的表达式，并由方程(15)求得一组新的$\lambda_{rs}^{(i)}$值，如此循环往复直至收敛。

3 算例与结果分析

本文针对不同的铺层和跨厚比情况进行了大量计算。材料工程常数选取如下：

$E_L=174.6\text{GPa}(25\times10^6\text{psi})$　　$E_T=6.9\text{GPa}(10^6\text{psi})$

$G_{LT}=3.5\text{GPa}(0.5\times10^6\text{psi})$　　$G_{TT}=1.4\text{GPa}(0.2\times10^6\text{psi})$

$\nu_{LT}=\nu_{TT}=0.25$

为了与相关文献中的三维解进行比较，位移和应力计算结果作以下无量纲化处理：

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_6)&=\frac{1}{p_0s^2}(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_{xy})\\ (\sigma_4,\sigma_5)&=\frac{1}{p_0s}(\tau_{yz},\tau_{xz})\\ (\bar{U}_1,\bar{U}_2)&=\frac{E_T\times10^2}{p_0hs^3}(u,v)\\ (\bar{W}&=\frac{E_T\times10^2}{p_0hs^4}(w)\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

所得部分结果示于表 1～2 和图 2～8，其中$s=\frac{a}{h}$为跨厚比。

表 1～2 列出了二层板(45°/−45°)和二层板(30°/−30°)在跨厚比$s=4,10,20,100$，边长b

$=a$ 时不同点的横向位移和应力的计算结果。在计算中每层又各分为二个亚层，只是一阶剪切变形理论和经典层合板理论的结果与是否分亚层无关。

表 1　二层板位移、应力比较表（45°/−45°，$a=b$）

S	理　论	$\bar{w}$ $(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0)$	σ_1 $(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2})$	σ_2 $(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2})$	σ_6 $(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2})$	σ_4 $(\frac{a}{2},0,z_1^*)$	σ_5 $(\frac{a}{2},0,z_2^*)$	σ_4 $(0,\frac{b}{2},z_3^*)$	σ_5 $(0,\frac{b}{2},z_4^*)$
4	精确解	1.6887	0.3092	0.3092	0.2327	0.2062	0.1239	0.1239	0.2062
	本文解	1.6176	0.2588	0.2588	0.1956	0.2155	0.1452	0.1452	0.2155
	一阶剪切变形理论解	1.7403	0.2498	0.2498	0.1981	0.2178	0.1526	0.1526	0.2179
10	精确解	0.8250	0.2594	0.2594	0.2029	0.2154	0.1461	0.1461	0.2154
	本文解	0.8095	0.2512	0.2512	0.1975	0.2175	0.1513	0.1513	0.2175
	一阶剪切变形理论解	0.8284	0.2498	0.2498	0.1981	0.2178	0.1526	0.1526	0.2179
20	本文解	0.6934	0.2501	0.2501	0.1979	0.2178	0.1523	0.1523	0.2178
	一阶剪切变形理论解	0.6981	0.2498	0.2498	0.1981	0.2178	0.1526	0.1526	0.2179
100	本文解	0.6562	0.2498	0.2498	0.1981	0.2179	0.1526	0.1526	0.2170
	一阶剪切变形理论解	0.6564	0.2498	0.2498	0.1981	0.2179	0.1526	0.1526	0.2179
	经典层合板理论解	0.6547	0.2498	0.2498	0.1981	0.2179	0.1526	0.1526	0.2197

注：z_i^*（$i=1,\cdots,4$）是剪应力取最大值时的 z 坐标。表 2 同。

表 2　二层板位移、应力比较表（30°/−30°，$a=b$）

S	理　论	$\bar{w}$ $(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0)$	σ_1 $(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2})$	σ_2 $(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2})$	σ_6 $(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2})$	σ_4 $(\frac{a}{2},0,z_1^*)$	σ_5 $(\frac{a}{2},0,z_2^*)$	σ_4 $(0,\frac{b}{2},z_3^*)$	σ_5 $(0,\frac{b}{2},z_4^*)$
4	精确解	1.7297	0.4945	0.2089	0.2335	0.1546	0.1363	0.0868	0.2561
	本文解	1.6598	0.4239	0.1763	0.1999	0.1584	0.1623	0.0998	0.2673
	一阶剪切变形理论解	1.7724	0.3973	0.1618	0.1923	0.1605	0.1728	0.1039	0.2706
10	精确解	0.8568	0.4204	0.1696	0.2018	0.1570	0.1639	0.1002	0.2699
	本文解	0.8412	0.4090	0.1639	0.1968	0.1578	0.1703	0.1035	0.2723
	一阶剪切变形理论解	0.8584	0.4044	0.1615	0.1955	0.1582	0.1721	0.1042	0.2729
20	本文解	0.7235	0.4070	0.1620	0.1964	0.1576	0.1715	0.1041	0.2732
	一阶剪切变形理论解	0.7277	0.4058	0.1614	0.1961	0.1577	0.1720	0.1043	0.2734
100	本文解	0.6858	0.4063	0.1614	0.1963	0.1576	0.1719	0.1043	0.2735
	一阶剪切变形理论解	0.6859	0.4063	0.1614	0.1963	0.1576	0.1721	0.1043	0.2735
	经典层合板理论解	0.6842	0.4063	0.1614	0.1963	0.1576	0.1719	0.1043	0.2735

可以看出，不同理论的结果随着跨厚比 s 的增大而接近，此时板更接近于薄板情况，剪切变形的影响变小。对于各种应力计算数据，简化分层理论都比一阶剪切变形理论更接近于三维解。而就横向位移而言，看似一阶剪切变形理论略优于简化分层理论，但一阶剪切变形理论的结果是通过人为引入剪切修正因子得到的，并不反映理论本身的精度。而这种修正因子的影响是不确定的，很多情况下即使进行了修正，一阶剪切变形理论的结果也仍不如简化分层理论。

图 2～8 给出了四层板（−30°/30°/−30°/30°，$s=4$，$a=b$）不同点位移和应力沿 z 向的分布情况。从剪应力和面内位移看，简化分层理论比其他二种理论都更接近三维解；从面内应力看，在应力较大的区域，简化分层理论也有明显改善。

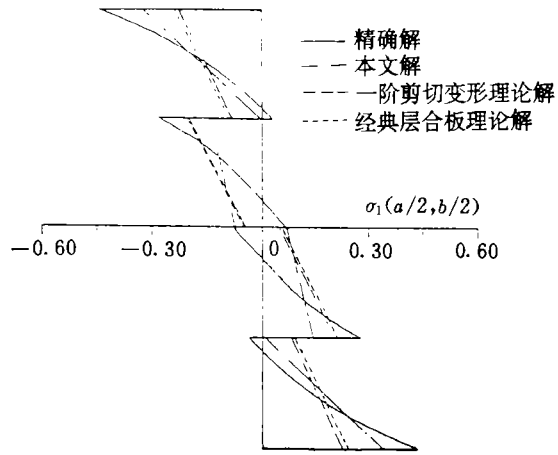

图 2 σ_1 沿 z 向分布图（−30°/30°/−30°/30°）

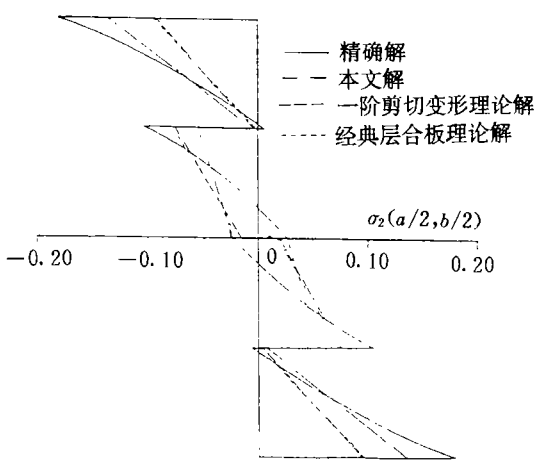

图 3 σ_2 沿 z 向分布图（−30°/30°/−30°/30°）

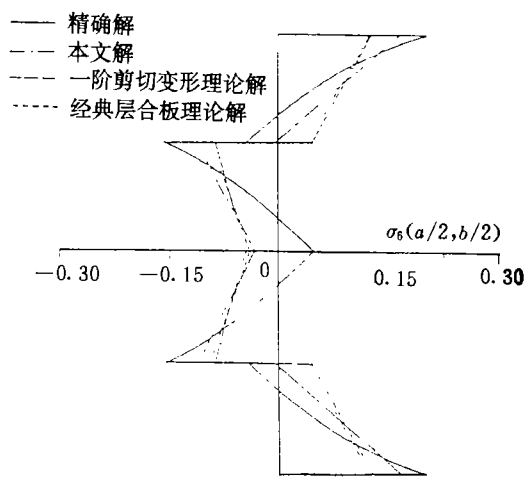

图 4 σ_6 沿 z 向分布图（−30°/30°/−30°/30°）

4 结 论

从理论分析和计算结果可以得出以下结论：

（1） 分层理论比经典层合板理论和一阶剪切变形理论都更接近于三维解，对于小跨厚比问题更为明显。

（2） 随着跨厚比增大（趋近于薄板），各种理论趋于一致，此时剪切变形影响减小。

（3） 应用简化分层理论时，通过增加分层数（包括增加亚层）可以有效地提高计算精度。

此外，作者也发现文献[12]的表 1 中部分应力数据有明显错误，已在本文表 1～2 中予以纠正。

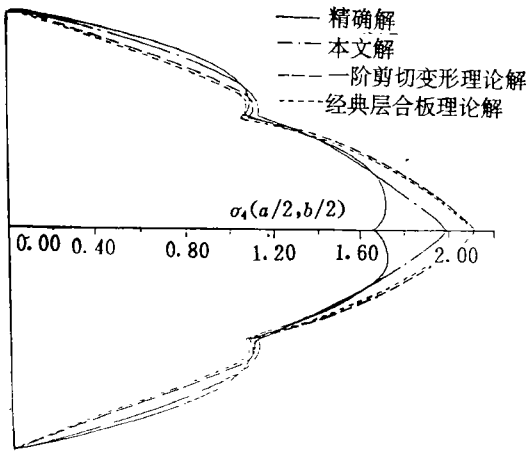

图 5　σ_4 沿 z 向分布图(−30°/30°/−30°/30°)

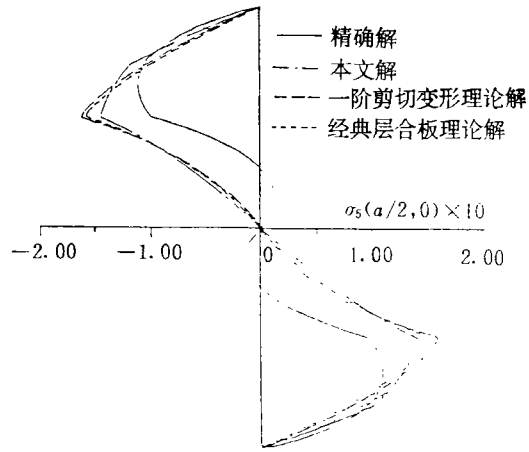

图 6　σ_5 沿 z 向分布图(−30°/30°/−30°/30°)

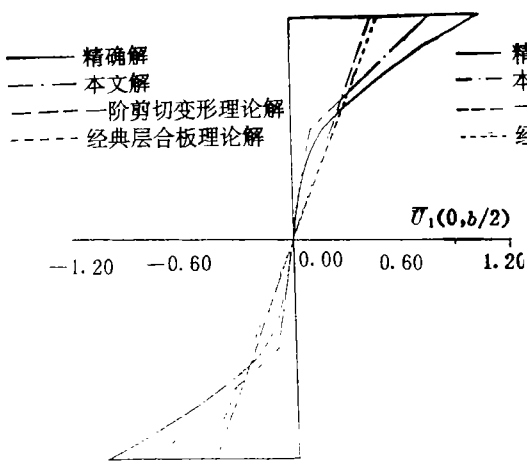

图 7　$\bar{U}_1$ 沿 z 向分布图(−30°/30°/−30°/30°)

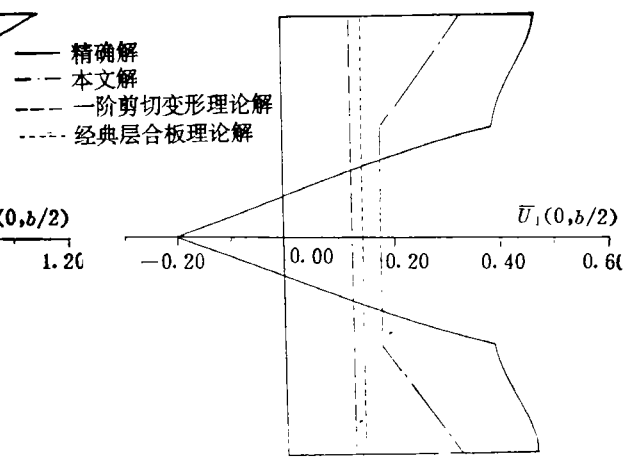

图 8　$\bar{U}_2$ 沿 z 向分布图(−30°/30°/−30°/30°)

附录　1

微分算子表达式为

$$L_{11}=A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+A_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{12}=(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$$

$$L_{13}=-[(2B_{16}-B_{16'}-B_{16''})+(B_{61}-B_{61'})]\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}-(B_{62}-B_{62'})\frac{\partial^3}{\partial y^3}$$

$$L_{14}=(B_{16'}+B_{61'})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$$

$$L_{15}=B_{16'}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B_{62'}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{22}=A_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+A_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{23}=-(B_{61}-B_{61'})\frac{\partial^3}{\partial x^3}-[(2B_{26}-B_{26'}-B_{26''})+(B_{62}-B_{62'})]\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}$$

$$L_{24}=B_{61}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B_{66'}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{25}=(B_{26}+B_{62''})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$$

$$L_{33}=(D_{11}-2D_{11'}+D_{1'1'})\frac{\partial^4}{\partial x^4}+(D_{22}-2D_{22'}+D_{2'2'})\frac{\partial^4}{\partial y^4}-$$

$$[2(D_{12}-D_{12'}-D_{21'}+D_{1'2'})+(4D_{66}-4D_{66'}-4D_{66''}+D_{6'6'}+2D_{6'6''}+D_{6''6''})]\frac{\partial^4}{\partial x^2y^2}-$$

$$G_{55}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-G_{44}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{34}=-(D_{11'}-D_{1'1'})\frac{\partial^3}{\partial x^3}-[(D_{21'}-D_{1'2'})+(2D_{66''}-D_{6'6''}-D_{6''6''})]\frac{\partial^3}{\partial xy^2}-G_{55}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{35}=-[(D_{12}-D_{1'2'})+(2D_{66'}-D_{6'6'}-D_{6'6''})]\frac{\partial^3}{\partial x^2y}-(D_{22}-D_{2'2'})\frac{\partial^3}{\partial y^3}-G_{44}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$L_{44}=D_{1'1'}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+D_{6''6''}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-G_{55}$$

$$L_{45}=(D_{1'2}+D_{6'6''})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$$

$$L_{55}=D_{6'6}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+D_{2'2'}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-G_{44}$$

式中 A_{ij}、B_{ij}、D_{ij}(i, j=1, 2, 6)为刚度系数,可见于一般的教科书[13],其余皆为补充刚度系数,其具体表达式如下:

$$D_{11'}=2[Q_{11}^{(0)}J_0+\sum_{t=1}^{N-1}(Q_{11}^{(t)}J_{11}^{(t)}+Q_{16}^{(t)}J_{21}^{(t)})]\qquad D_{12'}=2[Q_{12}^{(0)}J_0+\sum_{t=1}^{N-1}(Q_{12}^{(t)}J_{22}^{(t)}+Q_{16}^{(t)}J_{12}^{(t)})]$$

$$D_{21'}=2[Q_{12}^{(0)}J_0+\sum_{t=1}^{N-1}(Q_{12}^{(t)}J_{11}^{(t)}+Q_{26}^{(t)}J_{21}^{(t)})]\qquad D_{22'}=2[Q_{22}^{(0)}J_0+\sum_{t=1}^{N-1}(Q_{22}^{(t)}J_{22}^{(t)}+Q_{26}^{(t)}J_{12}^{(t)})]$$

$$D_{66}=2[Q_{66}^{(0)}J_0+\sum_{t=1}^{N-1}(Q_{66}^{(t)}J_{22}^{(t)}+Q_{16}^{(t)}J_{12}^{(t)})]\qquad D_{66''}=2[Q_{66}^{(0)}J_0+\sum_{t=1}^{N-1}(Q_{66}^{(t)}J_{11}^{(t)}+Q_{26}^{(t)}J_{21}^{(t)})]$$

$$D_{1'1'}=2[Q_{11}^{(0)}J_0+\sum_{t=1}^{N-1}(Q_{11}^{(t)}J_{1111}^{(t)}+Q_{66}^{(t)}J_{2121}^{(t)}+2Q_{16}^{(t)}J_{1121}^{(t)})]$$

$$D_{1'2'}=2[Q_{12}^{(0)}J_0+\sum_{t=1}^{N-1}(Q_{12}^{(t)}J_{1122}^{(t)}+Q_{66}^{(t)}J_{1221}^{(t)}+Q_{16}^{(t)}J_{1112}^{(t)}+Q_{26}^{(t)}J_{2221}^{(t)})]$$

$$D_{2'2'}=2[Q_{22}^{(0)}J_0+\sum_{t=1}^{N-1}(Q_{22}^{(t)}J_{2222}^{(t)}+Q_{66}^{(t)}J_{1212}^{(t)}+2Q_{26}^{(t)}J_{2212}^{(t)})]$$

$$D_{6'6'}=2[Q_{66}^{(0)}J_0+\sum_{t=1}^{N-1}(Q_{11}^{(t)}J_{1212}^{(t)}+Q_{66}^{(t)}J_{2222}^{(t)}+2Q_{16}^{(t)}J_{2212}^{(t)})]$$

$$D_{6'6''}=2[Q_{66}^{(0)}J_0+\sum_{t=1}^{N-1}(Q_{12}^{(t)}J_{1221}^{(t)}+Q_{66}^{(t)}J_{1122}^{(t)}+Q_{16}^{(t)}J_{1112}^{(t)}+Q_{26}^{(t)}J_{2221}^{(t)})]$$

$$D_{6''6'}=2[Q_{66}^{(0)}J_0+\sum_{t=1}^{N-1}(Q_{22}^{(t)}J_{2121}^{(t)}+Q_{66}^{(t)}J_{1111}^{(t)}+2Q_{26}^{(t)}J_{1121}^{(t)})]$$

其中

$$\tilde{t}_{rs}^{(t)}=\begin{cases}t_r^{(t)}+s(t)z_0 & (r=s)\\ t_{rs}^{(t)} & (r\neq s)\end{cases}\qquad J_t=\frac{1}{12}t_0^3+t_0z_0^2$$

$$J_{ij}^{(t)} = s(t)z_t t_t \tilde{t}_{pq}^{(t)} + \frac{1}{12}\lambda_{pq}^{(t)} t_t^3 \qquad J_{pq,rs}^{(t)} = t_t \tilde{t}_{pq}^{(t)} \tilde{t}_{rs}^{(t)} + \frac{1}{12}\lambda_{pq}^{(t)} \lambda_{rs}^{(t)} t_t^3$$

$$(pq,\ rs = 11,\ 22,\ 12,\ 21)$$

定义

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= t_0 z_0 \\ s_{rs}^{(t)} &= s(t) t_t \tilde{t}_{rs}^{(t)} \quad (rs = 11,\ 22,\ 12,\ 21) \end{aligned}\right\}$$

则 B_{ij} 和 b_{ij} 的表达式为

$$B_{16} = 2\left[Q_{16}^{(0)} s_0 + \sum_{t=1}^{N-1}\left(Q_{11}^{(t)} s_{12}^{(t)} + Q_{16}^{(t)} s_{22}^{(t)}\right)\right] \qquad B_{16}' = 2\left[Q_{16}^{(0)} s_0 + \sum_{t=1}^{N-1}\left(Q_{12}^{(t)} s_{21}^{(t)} + Q_{16}^{(t)} s_{11}^{(t)}\right)\right]$$

$$B_{61} = 2\left[Q_{16}^{(0)} s_0 + \sum_{t=1}^{N-1}\left(Q_{66}^{(t)} s_{21}^{(t)} + Q_{16}^{(t)} s_{11}^{(t)}\right)\right] \qquad B_{61}' = 2\left[Q_{26}^{(0)} s_0 + \sum_{t=1}^{N-1}\left(Q_{66}^{(t)} s_{12}^{(t)} + Q_{26}^{(t)} s_{22}^{(t)}\right)\right]$$

$$B_{26} = 2\left[Q_{26}^{(0)} s_0 + \sum_{t=1}^{N-1}\left(Q_{12}^{(t)} s_{12}^{(t)} + Q_{26}^{(t)} s_{22}^{(t)}\right)\right] \qquad B_{26}' = 2\left[Q_{26}^{(0)} s_0 + \sum_{t=1}^{N-1}\left(Q_{22}^{(t)} s_{21}^{(t)} + Q_{26}^{(t)} s_{11}^{(t)}\right)\right]$$

此外，G_{44}、G_{45}、G_{55} 表达式为

$$G_{44} = 2\left\{Q_{44}^{(0)} t_0 + \sum_{t=1}^{N-1}\left[t_t\left(Q_{44}^{(t)} \lambda_{22}^{(t)2} + Q_{55}^{(t)} \lambda_{12}^{(t)2} + 2Q_{45}^{(t)} \lambda_{22}^{(t)} \lambda_{12}^{(t)}\right)\right]\right\}$$

$$G_{45} = 2\left\{Q_{45}^{(0)} t_0 + \sum_{t=1}^{N-1}\left\{t_t\left[Q_{44}^{(t)} \lambda_{22}^{(t)} \lambda_{21}^{(t)} + Q_{55}^{(t)} \lambda_{11}^{(t)} \lambda_{12}^{(t)} + Q_{45}^{(t)}\left(\lambda_{11}^{(t)} \lambda_{22}^{(t)} + \lambda_{12}^{(t)} \lambda_{21}^{(t)}\right)\right]\right\}\right\}$$

$$G_{55} = 2\left\{Q_{55}^{(0)} t_0 + \sum_{t=1}^{N-1}\left[t_t\left(Q_{55}^{(t)} \lambda_{11}^{(t)2} + Q_{44}^{(t)} \lambda_{21}^{(t)2} + 2Q_{45}^{(t)} \lambda_{11}^{(t)} \lambda_{21}^{(t)}\right)\right]\right\}$$

附录 2

定义

$$\gamma_x = \frac{\partial \Psi_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \qquad \gamma_y = \frac{\partial \Psi_y^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \Psi_y^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \qquad \gamma_{yx} = \frac{\partial \Psi_x^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

$$d_{1,11} = \gamma_x \quad d_{2,11} = 0 \quad d_{6,11} = \gamma_{yx} \quad d_{1,22} = 0 \quad d_{2,22} = \gamma_y \quad d_{6,22} = \gamma_{xy}$$

$$d_{1,12} = \gamma_{xy} \quad d_{2,12} = 0 \quad d_{6,12} = \gamma_y \quad d_{1,21} = 0 \quad d_{2,21} = \gamma_{yx} \quad d_{6,21} = \gamma_x$$

则

$$C_{rspq}^{(kj)} = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega t_j \Big\{ \sum_m \sum_n \Big[\frac{1}{2} Q_{mn}^{(k)} t_k^2 + t_k \sum_{K^*}(t_t Q_{mn}^{(t)})\Big] d_{m,rs} d_{n,pq} \Big\} \mathrm{d}\Omega \\ \qquad (k \cdot j > 0,\ |j| < |k|) \\ \displaystyle\int_\Omega t_k \Big\{ \sum_m \sum_n \Big[\frac{1}{3} Q_{mn}^{(k)} t_k^2 + t_k \sum_{K^*}(t_t Q_{mn}^{(t)})\Big] d_{m,rs} d_{n,pq} + a_{rs,pq}^{(kj)} \Big\} \mathrm{d}\Omega \\ \qquad (j = k) \\ \displaystyle\int_\Omega t_k \Big\{ \sum_m \sum_n \Big[\frac{1}{2} Q_{mn}^{(t)} t_t^2 + t_t \sum_{j^*}(t_t Q_{mn}^{(t)})\Big] d_{m,rs} d_{n,pq} \Big\} \mathrm{d}\Omega \\ \qquad (k \cdot j > 0,\ |j| > |k|) \end{cases} \qquad (m,\ n = 1,\ 2,\ 6)$$

式中积分为对板域的面积分，$\sum_{k^*}$ 表示对所有满足 $t > k$ 的 t 值求和。

$$a_{rs,pq} = \begin{bmatrix} Q_{45}^{(k)} \gamma_{yz}^{(0)2} & Q_{45}^{(k)} \gamma_{xz}^{(0)} \gamma_{yz}^{(0)} & Q_{55}^{(k)} \gamma_{yz}^{(0)} \gamma_{xz}^{(0)} & Q_{45}^{(k)} \gamma_{xz}^{(0)2} \\ & Q_{44}^{(k)} \gamma_{yz}^{(0)2} & Q_{45}^{(k)} \gamma_{yz}^{(0)2} & Q_{44}^{(k)} \gamma_{xz}^{(0)} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \text{对} & & Q_{55}^{(k)} \gamma_{yz}^{(0)2} & Q_{45}^{(k)} \gamma_{xz}^{(0)} \gamma_{yz}^{(0)} \\ & \text{称} & & Q_{44}^{(k)} \gamma_{xz}^{(0)2} \end{bmatrix}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{xz}^{(0)}&=\Psi_x^{(0)}+\frac{\partial W}{\partial x}\\ \gamma_{yz}^{(0)}&=\Psi_y^{(0)}+\frac{\partial W}{\partial y}\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned}d_{rs}^{(k)}=\int_\Omega\sum_m d_{m,rs}\{&s(k)[\frac{1}{2}Q_{m1}^{(k)}t_k^2+t_k\textstyle\sum_{k^*}(t_iQ_{m1}^{(i)})][\varepsilon_x+(z_0+\frac{1}{2}s(k)t_0)\gamma_x]\}+\\ &s(k)[\frac{1}{2}Q_{m2}^{(k)}t_k^2+t_k\textstyle\sum_{k^*}(t_iQ_{m2}^{(i)})][\varepsilon_y+(z_0+\frac{1}{2}s(k)t_0)\gamma_y]\}+\\ &s(k)[\frac{1}{2}Q_{m6}^{(k)}t_k^2+t_k\textstyle\sum_{k^*}(t_iQ_{m6}^{(i)})]\{\gamma_{xy}+[z_0+\frac{1}{2}s(k)t_0](\gamma_{xy}+\gamma_{yx})]\}+\\ &\{Q_{m1}^{(k)}[\frac{1}{2}s(k)z_kt_k^2+\frac{1}{12}t_k^3]+s(k)t_k\textstyle\sum_{k^*}(z_it_iQ_{m1}^{(i)})\}(-\frac{\partial^2W}{\partial x^2})+\\ &\{Q_{m2}^{(k)}[\frac{1}{2}s(k)z_kt_k^2+\frac{1}{12}t_k^3]+s(k)t_k\textstyle\sum_{k^*}(z_it_iQ_{m2}^{(i)})\}(-\frac{\partial^2W}{\partial y^2})+\\ &\{Q_{m6}^{(k)}[\frac{1}{2}s(k)z_kt_k^2+\frac{1}{12}t_k^3]+s(k)t_k\textstyle\sum_{k^*}(z_it_iQ_{m6}^{(i)})\}(-2\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y})\}\mathrm{d}\Omega\\ &(m=1,2,6)\end{aligned}$$

参 考 文 献

1 陈绍杰. 复合材料及其应用的最新发展. 复合材料及其结构的力学进展, 周履等编, 华南理工大学出版社, 1991; 162－182

2 Reissner E, Stavsky Y. Bending and stretching of certain types of heterogeneous aeolotropic elastic plates. J Appl Mech, 1961; 28(3): 402－408

3 Dong S B, Pister K S, Taylor R L. On the theory of laminated anisotropic shells and plates. J Aerospace Sci, 1962; 29(8): 969－975

4 Yang P C, Norris C H, Stavsky Y. Elastic wave propagation in heterogeneous plates. Inter J Solids Struct, 1966; 2(4): 665－684

5 Whitney J M, Pagano N J. Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. J Appl Mech, 1970; 37(4): 1031－1036

6 Reddy J N. A simple higher-order theory for laminaed composite plates. J Appl Mech, 1981; 51(4): 745－752

7 Lo K H, Christensen R M, Wu E M. A higher-order theory of plate deformation-part Ⅱ: laminate plates. J Appl Mech, 1977; 44(4): 669－676

8 Sun C T, Whitney J M. Theories for the dynamic response of laminated plates. AIAA J, 1973; 11(2): 178－183

9 Srinvas S. A refined analysis of composite laminates. J Sound Vib, 1973; 30(4): 495－507

10 Seide P. An improved approximate theory for the bending of laminated plates. In: S Nemat-Nasser ed. Mechanics Today (Vol 5), Oxford, UK: pergamon press, 1980; 451－466

11 He Jifan, Chou Mon, Zhang Xiang. Bending analysis of laminated plates using a refined shear deformation theory. Comp struct, 1993; 24(2): 125－138

12 Savoia M, Reddy J N. A variational approach to three dimensional elasticity solutions of laminated composite plates. J Appl Mech, 1992; 59(2): s166－s175

13 琼斯 R M. 复合材料力学. 朱颐龄等译校, 上海科学技术出版社, 1981: 28－93

BENDING ANALYSIS OF ANTISYMMETRIC ANGLE-PLY COMPOSITE LAMINATES WITH THE CONSIDERATION OF SHEAR DEFORMATION

Zhang Zhizhou　　He Jifan

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract　A bending analysis, with consideration of transverse shear deformation, is presented for antisymmetric angle-ply composite laminates. A closed form solution is obtained by use of Simplified Discrete-Layer Theory (SDLT). The governing equations are derived on the basis of the general equations obtained by the principle of minimum potential energy through introduction of additional assumptions suitable for the laminate layout. Numerical computations are carried out for a few example laminates by SDLT, Classical Plate Theory (CPT) and First-order Shear Deformation Theory (FSDT). All the results obtained are compared with the three dimensional solutions from the literature. It is shown that the bending problems of antisymmetric angle-ply laminates are solved effectively by SDLT.

Key words　laminates, bending, antisymmetric angle-ply, shear deformation

日本不饱和聚酯树脂调价

据EPJ1994年12月1日报道，大日本油墨化学工业公司(DIC)的成型树脂事业部从94年11月份起就与用户交涉，从12月份开始，不饱和聚酯树脂(UP)决定每公斤价格只少上调25日元(约2.2元)。

由于政局混乱及除受厚生省补助的净化槽有增长之外，其他用途方面尚未恢复增长，1994年1～9月的UP树脂产量为183,918吨(其中FRP用141,639吨，约占77%)，基本维持在前一年同期的水平上。在泡沫经济崩溃后，树脂价格一直维持低迷状态。

进入1994年后，占UP树脂成本约40%的苯乙烯单体曾二次价格上调；此外，邻苯二甲酸酐等的原料价格也在上涨。这些原料价格的上涨幅度已经使每公斤UP树脂价格上涨接近30日元(约2.5元)。

各UP树脂制造厂家的原料价格上涨情况基本相同，据认为，同行业其他公司也会效仿树脂生产大户DIC，将对UP树脂价格作类似的修正。

(申成荣)