第 12 卷 第 2 期 复 合 材 料 学 报 Vol. 12 No. 2
1995 年 6 月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA June 1995

短纤维悬浮体系的流变性质

冯金海 吴 靖 戴干策
(华东理工大学聚合物加工室,上海,200237)

摘 要 本文介绍了 Dinh－Armstrong 流变本构方程,并由此导出了中等浓度纤维悬浮体的粘度、第一法向应力差、第二法向应力差以及拉伸粘度的解析表达式,在简单剪切流时,导出的解析式与 Dinh－Armstrong 方程的数值解是一致的。在拉伸流时,尽管起始时和稳定态的粘度一致,但在过渡阶段存在一些定量的差异。

关键词 流变状态方程,短纤维悬浮体,流变性质

1 引 言

复合材料由于具有很高的比强度,优良的机械性能以及耐腐蚀性能,在汽车和航空工业大量用于替代金属。其中,短纤维复合材料因为易于成型形 状复杂的部件,在各个行业都得到广泛应用。这类复合材料成型过程的基本原理是短纤维悬浮体的充模流动以及随后的团化过程。为了深入理解这一过程。必须建立适当的状态方程以描述这类体系的流变本构关系。

Dinh 和 Armstrong[1]曾经提出过一个描述中等浓度纤维悬浮体的流变本构方程,其应力张量是以积分形式给出的。Bibbo 等[2]的实验结果表明,在简单剪切流时,这一方程能够很好地预测非稀释纤维悬浮体的流变性质。但是,这一本构方程的数学形式非常复杂,其中包含一个四阶张量,而且其应力与流体动力学的关系也不明显。Altan 等利用数值方法和封闭近似的方法,计算了 Hele－Shaw 流时的流变性质,其结果与 Dinh－Armstrong 的结果[1]定性上是一致的,但定量上有较大的偏差。

Currie[4]提出,聚合物溶液的应变依赖性可以通过一个势函数来表征,而这一势函数可以表达为 Finger 应变张量的函数,因此就可以进一步简化积分形式的本构方程。借 助于 Currie 的方法,对于任何两维流动,这类本构方程中的运动张量都 可以 以速度及其梯度来表达。利用同样的方法来化简 Dinh－Armstrong 模型,Papanastasion 及其合作者研究了纤维悬浮体的两维流动[5]。在简单剪切流和拉伸流时,Dinh－Armstrong 方程中的四阶取向张量可以表达的相应的 Finger 应变张量的函数,因此我们就可以导出其流变性质的解析表达式。

2 Dinh－Armstrong 流变模型简介

Dinh 和 Armstrong 导出的牛顿流体中等浓度纤维悬浮物的流变状态方程为[1]:

本文于 1994 年 7 月 16 日收到修改稿,1994 年 3 月 15 日收到初稿

$$\tau = -\eta_S 2D\{1 + \frac{1}{48}\frac{nl^3}{\ln(2h/d)} : \int \frac{\vec{p}\vec{p}\vec{p}\vec{p}\mathrm{d}\vec{p}}{(1 + F : \vec{p}\vec{p})^{3/2}} \tag{1}$$

其中，η_S 为介质粘度；$D=1/2[\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^{\mathrm{T}}]$是变形速率张量，$\vec{p}$ 为流动速度；n 为单位体积悬浮物中纤维的数目；l 和 d 分别为纤维的长度和直径；h 为给定纤维与其最近的纤维之间的距离，排列整齐时 $h=(nl)^{-1/2}$，无规取向时 $h=(nl)^{-1}$；F 为有限应变张量。

$F = B^{-1} - I$，B^{-1} 为 Finger 应变张量的逆，I 为单位张量；$\vec{p}$ 为单根纤维的取向矢量。其取向分布函数的解为：

$$\Phi(\vec{p},t) = \frac{1}{4h}(\Delta^T\Delta : \vec{p}\vec{p})^{-3/2} \tag{2}$$

Δ 为变形张量的逆，$\Delta ij = \partial X_i^\circ/\partial X_j$，$X_i^\circ$ 和 X_j 分别是流体颗粒在时间 t_0 和 t 时的坐标。

对于简单剪切流的起动阶段，$v_x = \dot{\gamma}y$，$v_y = v_z = 0$，我们最感兴趣的流变性质为非定常粘度 η^+，第一法向应力系数 ψ_1^+，第二法向应力系数 ψ_2^+，其定义分别为：

$$\eta^+ = -\tau_{yx}/\dot{\gamma} \tag{3}$$

$$\psi_1^+ = -(\tau_{xx} - \tau_{yy})/\dot{\gamma}^2 \tag{4}$$

$$\psi_2^+ = -(\tau_{yy} - \tau_{zz})/\dot{\gamma}^2 \tag{5}$$

$\dot{\gamma}$ 为剪切速率，τ_{xx}，τ_{yy}，τ_{xy}，τ_{zz}是应力张量 τ 的分量。

Dinh 和 Armstrong[1]以及 Altan 等[3]估计了式(3)－(5)的值：

$$\frac{\ln(2h/d)}{nl^3}(\frac{\eta^+}{\eta_S} - 1) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin^5\theta \sin^2 2\varphi \,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{96(\gamma^2\sin^2\theta \sin^2\varphi - \gamma\sin^2\theta \sin^2\varphi + 1)^{3/2}} \tag{6}$$

$$\frac{\ln(2h/d)}{nl^3\eta_S}\dot{\gamma}\psi_1^+ = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin^5\theta\sin 4\varphi \,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{96(\gamma^2\sin^2\theta \sin^2\varphi - \gamma\sin^2\theta \sin^2\varphi + 1)^{3/2}} \tag{7}$$

$$\frac{\ln(2h/d)}{nl^3\eta_S}\dot{\gamma}\psi_2^+ = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin^5\theta\sin 2\varphi\,(\sin^2\varphi - \cos^2\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{48(\gamma^2\sin^2\theta \sin^2\varphi - \gamma\sin^2\theta \sin^2\varphi + 1)^{3/2}} \tag{8}$$

其中 γ 为剪切应变，θ 和 φ 分别为笛卡尔坐标系中纤维取向的角度[3]。式(6)～(8)可以用数值计算的方法求解。Altan 等通过封闭近似的方法求得了式(6)～(8)的近似数值解[3]。对于位伸流的起动阶段，$v_x = -(\dot{\varepsilon}/2)x$，$v_y = -(\dot{\varepsilon}/2)y$，$v_z = -\dot{\varepsilon}z$，我们最感兴趣的流变性质为非定常拉伸粘度 $\bar{\eta}^+$，其定义为：

$$\bar{\eta}^+ = -(\tau_{zz} - \tau_{xx})/\dot{\varepsilon} \tag{9}$$

$\dot{\varepsilon}$ 为拉伸速率。类似地，可以得到：

$$\frac{\ln(2h/d)}{nl^3}(\frac{\eta^+}{\eta_S} - 3) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{(2 - 3\sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{48(e^{\varepsilon}\sin^2\theta + e^{-2\varepsilon}\cos^2\theta)^{3/2}} \tag{10}$$

ε 为 Hencky 应变。

在式(6)－(8)和(10)中，流变性质都是以积分形式给出，必须通过数值方法求解。在简单剪切流和拉伸流时，由于 Finger 应变张量的大部分分量为 0，所以能够得到式(6)～(8)和(10)。而在复杂的两维流动时，这是不可能的。因此，必须要导出流变性质的解析式。

3　Dinh－Armstrong 流变状态方程的解析解

Currie 指出[4]，式(1)中的二阶张量 D 与四阶取向张量 $\int(\vec{p}\vec{p}\vec{p}\vec{p}\mathrm{d}\vec{p})/(1 + F : \vec{p}\vec{p})^{3/2}$ 的张量积可以一个二阶张量 G 来代替，而 G 可表达为 Finger 应变张量的分量及其不变量的函数，

即：

$$G = D : \int \frac{\vec{p}\vec{p}\vec{p}\vec{p}\mathrm{d}\vec{p}}{(1 + F : \vec{p}\vec{p})^{3/2}} \tag{11}$$

这里有：

$$G_{ij} = \frac{4\pi}{5} C_{ijkm} D_{km} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} C_{ijkm} = & - U_{11} B_{ij} B_{km} - U_{12}(II B_{ij}\delta_{km} - B_{ij}B_{km}^{-1} - B_{km}B_{ij}^{-1}) \\ & + U_{22} B_{ij}^{-1}(II\delta_{km} - B_{km}^{-1}) - V_1 B_{km}\delta_{ij} + A_{ij}\delta_{km} - V_2(II\delta_{km} - B_{km}^{-1})\delta_{ij} \\ & + \frac{1}{2}V(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{jk}\delta_{im}) - \frac{1}{2}U_2(\delta_{jm}B_{ik}^{-1} + \delta_{jk}B_{im}^{-1} + \delta_{ik}B_{jm}^{-1} + \delta_{im}B_{jk}^{-1}) \end{aligned} \tag{13}$$

$$\mathrm{A}_{ij} = (II U_{12} - V_1) B_{ij} + (V_2 - II U_{22}) \mathrm{B}_{ij}^{-1} + \frac{1}{3}(I V_1 + 2 II V_2)\delta_{ij} \tag{14}$$

$$U = 5 \ln\left[\frac{I + 2(II + 3.25)^{0.5} - 1}{7}\right] \tag{15}$$

$$V = \frac{5 - I U_1 + II U_2}{3} \tag{16}$$

$$I = \mathrm{tr}(B) \tag{17}$$

$$II = \mathrm{tr}(B^{-1}) \tag{18}$$

及 $U_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial I^2}$；$V_1 = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial I}$ 等 D_{km} 为变形速率张量的元素。而 Finger 应变张量 B 和它的逆 B^{-1} 可以以速度及其梯度表示[5~7]。

由于 $2D = [\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^T]$ 和 D 为对称张量，因此对于任意两维流动，式(1)变为：

$$\tau = -\eta_s\left[2D + \frac{1}{48}\frac{nl^3}{\ln(2h/D)}2G\right] \tag{19}$$

这里 D 和 G 都可以用速率和速度梯度表示出来。若 Finger 张量及其逆的形式简单[8]，那么就可以用式(12)～(19)来预测材料的流变性质。

对于简单剪切流起始阶段，$v_x = \dot{\gamma} y, v_y = v_z = 0$，我们可以得到：

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ -\gamma & \gamma^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 + \gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I = \mathrm{tr}(B) = 3 + \gamma^2 \qquad II = \mathrm{tr}(B^{-1}) = 3 + \gamma^2 \qquad U = 5 \ln \frac{2 + \gamma^2 + 2\sqrt{6.25 + \gamma^2}}{7}$$

$$U_1 = \frac{\partial U}{\partial I} = \frac{5}{2 + \gamma^2 + 2\sqrt{6.25 + \gamma^2}}$$

$$U_2 = \frac{5}{(2 + \gamma^2 + 2\sqrt{6.25 + \gamma^2})\sqrt{6.25 + \gamma^2}}$$

令

$$a_1 = 2 + \gamma^2 + \sqrt{6.25 + \gamma^2} \qquad a_2 = \sqrt{6.25 + \gamma^2}$$

那么

$$U_1 = 5/a_1, \qquad U_2 = 5/a_1 a_2$$

$$U_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial I} = -5/a_1^2, U_{12} = \frac{\partial U_1}{\partial I} = U_{21} = \frac{-5}{a_1^2 a_2}$$

$$U_{22} = -5\frac{a_1 + 2a_2}{2a_1^2 a_2^3} \qquad V_1 = \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{a_1} + \frac{3 + \gamma^2}{a_1^2} + \frac{3 + \gamma^2}{a_1^2 a_2}\right)$$

$$V_2 = \frac{5}{3}\left[\frac{3+\gamma^2}{a_1^2 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2} - \frac{a_1 + 2a_2}{2a_1^2 a_2^3}(3+\gamma^2)\right]$$

由式(19)可得：

$$\tau_{21} = -\eta_S\left(2D_{21} + \frac{1}{48}\frac{nl^3}{\ln(2h/d)}2G_{21}\right)$$

$$= -\eta_S\left[\dot{\gamma} + \frac{\dot{\gamma}}{48}\frac{nl^3}{\ln(2h/d)} \times \frac{4}{5}\pi(C_{2112} + C_{2121})\right] \tag{20}$$

$$\tau_{21}/(-\eta_S\dot{\gamma}) = \frac{\eta^+}{\eta_S} = 1 + \frac{\pi}{60}\frac{nl^3}{\ln(2h/d)}(C_{2112} + C_{2121})$$

$$\frac{\ln(2h/d)}{nl^3}\left(\frac{\eta^+}{\eta_S} - 1\right) = \frac{\pi}{60}(C_{2112} + C_{2121})$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{6} - \frac{3+\gamma^2}{6a_1} + \frac{\gamma^2}{a_1^2} - \frac{3+2\gamma^2}{6a_1 a_2} + \frac{3+2\gamma^2}{a_1^2 a_2} + \frac{2\gamma^2}{a_1^2 a_2} + \frac{a_1+2a_2}{2a_1^2 a_2^3}\gamma^2\right) \tag{21}$$

$$\tau_{11} = -\eta_S\left(2D_{11} + \frac{1}{48}\frac{nl^3}{\ln(2h/d)}2G_{11}\right) = -\eta_S\dot{\gamma}\frac{\pi}{60}\frac{nl^3}{\ln(2h/D)}(C_{1112} + C_{1121}) \tag{22}$$

$$\tau_{22} = -\eta_S\dot{\gamma}\frac{\pi}{60}\frac{nl^3}{\ln(2h/d)}(C_{2212} + C_{2221}) \tag{23}$$

$$\tau_{33} = -\eta_S\dot{\gamma}\frac{\pi}{60}\frac{nl^3}{\ln(2h/d)}(C_{3312} + C_{3321}) \tag{24}$$

$$= -\frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\dot{\gamma}^2} = \psi_1^+ = \frac{\eta_S}{\dot{\gamma}}\frac{nl^3}{\ln(2h/d)}\frac{\pi}{60}(C_{1112} + C_{1121} - C_{2212} - C_{2221})$$

$$\frac{\ln(2h/d)}{nl^3}\frac{\dot{\gamma}\psi_1^+}{\eta_S} = \frac{\pi\gamma^3}{6}\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{2}{a_1^2 a_2} + \frac{a_1+2a_2}{2a_1^2 a_2^3}\right) \tag{25}$$

同理可得：

$$\frac{\ln(2h/d)}{nl^3}\frac{\dot{\gamma}\psi_2^+}{\eta_S} = \frac{\pi\gamma}{6}\left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{\gamma^2}{a_1^2 a_2} - \frac{a_1+2a_2}{2a_1^2 a_2^3}\gamma^2\right) \tag{26}$$

类似地，我们可以推出在拉伸流起始时的非定常拉伸粘度 $\bar{\eta}^+$ 的解析表达式：

$$\frac{\ln(2h/d)}{nl^3}\left(\frac{\bar{\eta}^+}{\eta_S} - 3\right) = \frac{\pi}{6}\left[\frac{(e^{-\varepsilon} - e^{2\varepsilon})^2}{b_1^2} + \frac{b_1+2b_2}{2b_1^2 b_2^3}(e^{\varepsilon} - e^{-2\varepsilon})^2 + \frac{1}{2}\right.$$

$$\left. - \frac{2e^{-\varepsilon} + e^{2\varepsilon}}{2b_1} + \frac{2e^{\varepsilon} + e^{-2\varepsilon}}{2b_1 b_2} - \frac{2}{b_1^2 b_2}(e^{-\varepsilon} + e^{2\varepsilon})(e^{\varepsilon} + e^{-2\varepsilon}) - \frac{e^{\varepsilon} + 2e^{-2\varepsilon}}{b_1 b_2}\right] \tag{27}$$

其中，

$$b_1 = 2e^{-\varepsilon} + e^{2\varepsilon} - 1 + 2\sqrt{2e^{\varepsilon} + e^{-2\varepsilon} + 3.25} \tag{28}$$

$$b_2 = \sqrt{2e^{\varepsilon} + e^{-2\varepsilon} + 3.25} \tag{29}$$

下面我们将对比式(6)～(8)和(10)与式(21)、(25)～(27)的结果。

4 结果与讨论

(1) 非定常剪切粘度 η^+　第一和第二法向应力系数 ψ_1^+、ψ_2^+，从式(6)和(21)中都可以看出：

(a) η^+ 是剪切应变的函数，而与 γ 和 t 无关。

(b) 稳态时，悬浮体的粘度接近介质粘度[3]。从式(20)很容易得到：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta^+(\dot{\gamma}t)}{\eta_S}=\lim_{\gamma\to\infty}\frac{\eta^+(\gamma)}{\eta_S}=1$$

(c) 零剪切应变时，粘度 η_0^+ 为：

$$\frac{\ln(2h/d)}{nl^3}\left(\frac{\eta_0^+}{\eta_S}-1\right)=\frac{\pi}{90}$$

这些结果与 Altan[3]的结果是完全一致的。图 1 为无量纲非定常剪切粘度与无量纲剪切应变的关系曲线，与 Dinh－Armstnong[1]以及 Altan 等[3]得到的图形完全相同。图 2 和图 3 分别为 ψ_1^+ 和 ψ_2^+ 的结果对比。由图可知，本文与 Dinh－Armstrong 的结果完全一致，而与 Altan 等的结果定量上有些差别。这可能是由于 Altan 等以二阶张量来近似四阶张量，然后进行数值计算引入了较大的误差。而随着 γ 的增大，结果逐渐趋于一致。

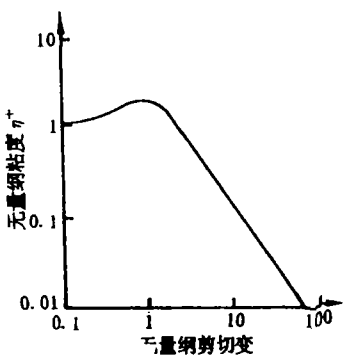

图 1 稳态剪切流起始时无量纲粘度－无量纲剪切应变的关系曲线

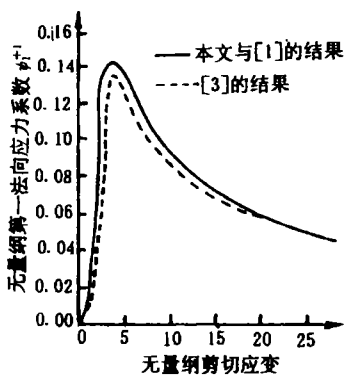

图 2 稳态剪切流起始时无量纲第一法向应力系数－无量纲剪切应变关系

(2) 非定常拉伸粘度 $\bar{\eta}^+$ 从式(1)和(27)可以看出：

(a) $\bar{\eta}^+$ 仅是 Hencky 应变 ε 的函数，而与拉伸应变速率 $\dot{\varepsilon}$ 和时间 t 无关。

(b) $\bar{\eta}^+$ 在稳定态的值为： $\lim_{t\to\infty}\frac{\bar{\eta}^+}{\eta_S}=\frac{\pi}{6}$（平面拉伸）

(c) Hencky 应变 ε 为 0 时有： $\frac{\ln(2h/d)}{nl^3}\left(\frac{\bar{\eta}^+}{\eta_S}-3\right)=\frac{\pi}{30}$

图 4 为平面拉伸流时，无量纲平面拉伸粘度－无量纲 Hencky 应变关系曲线的对比。由图可见，本文的结果与 Dinh－Armstrong 的积分结果基本上是一致的，而与 Altan[3]等的结果定性上一致，定量上偏差较大。这个误差可以归因于数值积分的误差，也可归因于 Currie 方法在预测拉伸流时的局限性。

5 结 论

本文利用 Currie 方法[4]化简 Dinh－Armstrong 流变状态方程，导出了短纤维复合材料流变性质的解析表达式。在简单剪切流时，得到的结果与 Dinh－Armstrong 的数值积分结果完全一致。在拉伸流时，存在一些定量的差异；在简单剪切流和拉伸流时，本文的结果与 Altan 用封闭近似方法得到的数值解定性上完全一致，但定量上有一定差异。

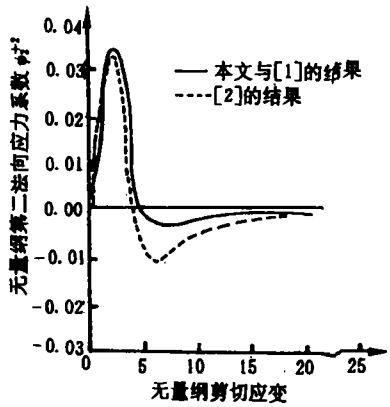

图 3　稳态剪切流起始时无量纲第二法向应力系数－无量纲剪切应变关系曲线

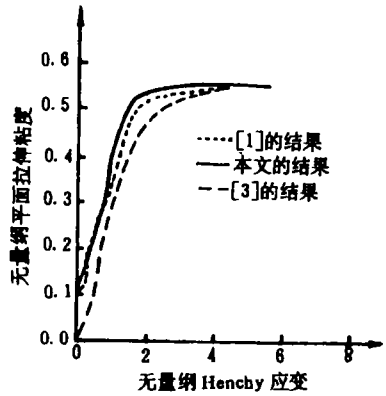

图 4　平面拉伸流起始时无量纲平面拉伸粘度－无量纲 Hencky 应变关系曲线

参 考 文 献

1 Dinh S M, Armstrong R C. J Rheol, 1984; 28: 207

2 Bibbo M A, Dinh S M, Armstrong R C. J Rheol, 1985; 29: 905

3 Altan M C, Advani S G, Guceri S I, Pipes R B. J Rheol, 1989; 33: 1129

4 Currie P K. J Non－Newt Fluid Mech, 1982; 11: 53

5 Alexandrou A N, Papanastasiou T C. J Non－Newt Fluid Mech, 1987; 25: 313

6 Winter H H. J Non－Newt Fluid Mech, 1982; 10: 157

7 Adachi K. Rheo Acta, 1986; 25: 555

8 Papanastasou T C, Scriven I E, Macosco C W. J Rheol, 1983; 7: 387

RHEOLOGICAL PROPERTIES OF SHORT－FIBER SUSPENSIONS

Feng Jinhai　Wu Jing　Dai Gance

(East China University of Science and Technology)

Abstract　The Dinh-Armstrong constitutive equation is used to derive analytic expressions for the viscosity and the normal stress difference in shear and elongational deformation of nondilute, short-fiber suspensions in Newtonian media. This is achieved by approximating the fourth order orientation tensor of the integral constitutive equation with the components of the Finger strain tensor according to Currie's expressions that relate the strain tensor to flow kinematics. The derived analytic expressions are in agreement with the numerical results given by Dinh-Armstrong in simple shear flow. In elongation, although the magnitudes of dimensionless viscosity at start-up and steady state are identical, there is quantitative disagreement in the values in-between.

Key words　rheological state equation, short fiber suspensions, rheological properties