第 12 卷 第 2 期 复 合 材 料 学 报 Vol. 12 No. 2
1995 年 6 月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA June 1995

一种三维纺织复合材料的本构关系及其性能分析

晏石林 沈大荣 王满廷
(武汉工业大学工程力学系，武汉 430070)

摘 要 本文对一种三维增强纤维复合材料的结构与性能进行了研究。通过对手工纺织的三向纤维增强复合材料的分析，建立了其细观力学模型，并在此基础上导出了反映其宏观力学性能的本构关系，同时采用具有相同纺织结构的试件进行试验，对本文的理论结果进行了验证。此外，通过对三维复合材料与层合板的力学性能进行对比试验，说明三维增强复合材料的综合性能，尤其是层间剪切性能得到了很大的改善和提高。

关键词 三维增强复合材料，分析模型，本构关系，性能分析

1 前 言

复合材料因其性能的可设计性而受到人们的高度重视，但是目前大量生产和使用的纤维复合材料几乎都是两维增强的，即层合复合材料，这种材料每层之间仅靠基体(如合成树脂)粘结在一起，在层合复合材料的厚度方向，其性能远比其它两个方向差，主要表现为抗冲击损伤能力低，容易分层破坏等[5]。因此对材料进行三维增强无疑是提高其综合性能的有效途径。目前国内外对三维复合材料的研究主要集中在三维纺织技术以及三维结构与性能的关系两个方面[5]。纺织技术的研究始于七十年代，而关于三维增强复合材料的结构与性能的研究则到八十年代才开始，且主要致力于如何建立力学模型。如有人提出的卷曲式模型、桥接模型以及马赛克模型等，这些模型都有各自的特点，但也有其局限性[2]。因此合理建立力学模型，进而分析和预报三维复合材料的性能，也是当前国内外学者十分关注的课题。

2 模型分析

在复合材料中，增强纤维的方向倾角对其力学性能有很大的影响，因此在进行三维复合材料的性能分析时，必须首先确定纤维纱线的方向。限于目前的纺织技术条件，本文所分析研究的三维复合材料由玻璃纤维方格布增加第三方向的纤维纱制成，纤维纺织结构示意图如图 1。根据这种纺织结构特点，可以将整块复合材料分成若干结构相同的单元体，其中任一单元体的纤维结构如图 2 所示。图中单元体的长 U、宽 V 和高 W 分别为纺织结构的径纱间距、纬纱间距和第三方向纤维的垂直高度，θ 为单元体对角线纤维倾角，即第三方向纤维与 Z 轴的夹角，β

本文于 1993 年 3 月 16 日收到第 2 次修改稿，1993 年 5 月 31 日收到初稿
湖北省自然科学基金资助项目

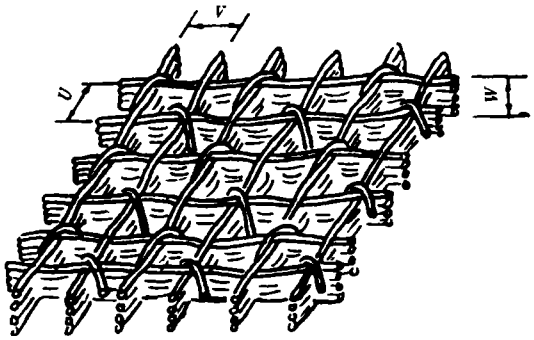

图 1 3D 纤维纺织结构示意图

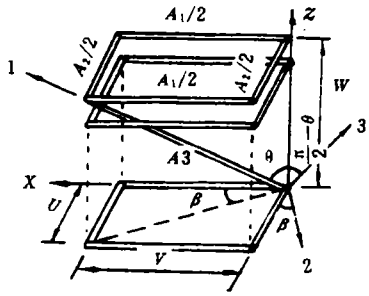

图 2 纤维结构单元模型

为第三向纤维的方位角。根据几何关系，可得

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \mathrm{tg}^{-1}(\sqrt{U^2+V^2}/W)\\ \beta &= \mathrm{tg}^{-1}(U/V)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

设织物中每股径向（X 向）纤维纱线的横截面积为 A_1，每股纬向（Y 向）纤维纱线的横截面积为 A_2，每股第三方向（对角线）纤维纱线的横截面积为 A_3（见图 2）。则沿 X、Y 和对角线方向分布的纤维的体积占单元总体积的分数分别为：

$$V_{f1}=\frac{nA_1}{UW},\qquad V_{f2}=\frac{nA_2}{VW},\qquad V_{f3}=\frac{A_3\sqrt{U^2+V^2+W^2}}{UVW} \tag{2}$$

式中：n 为第三方向纤维所穿过的平行于 XY 面的两维织物的层数。各纤维纱线的横截面积 A_i 由下式计算：

$$A_i = d_i/\rho \tag{3}$$

其中： d_i——各向纤维纱的线密度，ρ——纤维的体积密度。

显然单元体中纤维的总体积含量为： $V_f = V_{f1}+V_{f2}+V_{f3}$ (4)

3 本构关系的建立

分析时，将三维增强复合材料单元体假想地分为三部分，各部分所占的体积分数为$\frac{V_{f1}}{V_f}$，$\frac{V_{f2}}{V_f}$和$\frac{V_{f3}}{V_f}$，分别由 X 向、Y 向和对角线向（即第三方向）的纤维增强。则三部分中除纤维的取向不同外，每部分中纤维占该部分的体积分数是相等的，即：

$$V_{f1}/(\frac{V_{f1}}{V_f}) = V_{f2}/(\frac{V_{f2}}{V_f}) = V_{f3}/(\frac{V_{f3}}{V_f}) = V_f \tag{5}$$

对于每一部分，可看成为单向增强的复合材料，其本构关系为：

$$\{\sigma_x\}_i = [\bar{C}]_i\{\varepsilon_x\}_i \tag{6}$$

式中：

$$\{\sigma_x\} = [\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_{yz}\ \tau_{zx}\tau_{xy}]^T$$

$$\{\varepsilon_x\} = [\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z\ \gamma_{yz}\ \gamma_{zx}\ \gamma_{xy}]^T$$

$$[\bar{C}]_i = [T_\sigma]_i[C][T_\sigma]_i^T \tag{7}$$

其中$[T_\sigma]_i$ 为各部分的应力转换矩阵；

$$[T_\sigma]_i = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2m_1n_1 & 2l_1n_1 & 2l_1m_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2m_2n_2 & 2l_2n_2 & 2l_2m_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2m_3n_3 & 2l_3n_3 & 2l_3m_3 \\ l_2l_3 & m_2m_3 & n_2n_3 & m_2n_3+m_3n_2 & l_2n_3+n_2l_3 & l_2m_3+l_3m_2 \\ l_1l_3 & m_1m_3 & n_1n_3 & m_1n_3+m_3n_1 & l_1n_3+n_1l_3 & l_1m_3+l_3m_1 \\ l_2l_1 & m_2m_1 & n_2n_1 & m_1n_2+m_2n_1 & l_1n_2+n_1l_2 & l_1m_2+l_2m_1 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &l_1 = \sin\theta\cos\beta, \quad m_1 = -\sin\beta, \quad n_1 = -\cos\theta\cos\beta \\ &l_2 = \sin\theta\sin\beta, \quad m_2 = \cos\beta, \quad n_2 = -\cos\theta\sin\beta \\ &l_3 = \cos\theta, \quad m_3 = 0, \quad n_3 = \sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

这里，l_1, l_2, l_3 分别为对角线纤维的方向余弦。显然，对于由 X 向纤维增强的部分，$[\theta,\beta]=[\frac{\pi}{2},0]$；由 Y 向纤维增强的部分，$[\theta,\beta]_2=[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$；对于由第三向纤维增强的部分，$\theta,\beta$ 由(1)计算确定。

式(7)中的[C]为单向复合材料的正轴刚度矩阵，按下式定义：

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{10}$$

式中：

$$\left.\begin{aligned} &C_{11} = (1-\mu_{23}^2)E_{11}/K, \qquad C_{12} = C_{13} = (1+\mu_{23})\mu_{21}E_{11}/K \\ &C_{22} = C_{33} = (1-\mu_{21}\mu_{12})E_{22}/K \\ &C_{44} = G_{23}, \quad C_{55} = G_{13}, \quad C_{66} = G_{12} \\ &K = 1 - 2\mu_{12}\mu_{21}(1+\mu_{23}) - \mu_{23}^2 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中弹性常数 E_{ij}、G_{ij}、μ_{ij} 可由试验或有关预测公式确定。

根据各部分不同的纤维方向参数$[\theta,\beta]$，分别计算出各部分的刚度矩阵$[\bar{C}]_i$，再参照复合材料力学中复合法则[1,7]，材料的总体刚度矩阵为：

$$[C_z] = \frac{V_{f1}}{V_f}[\bar{C}]_1 + \frac{V_{f2}}{V_f}[\bar{C}]_2 + \frac{V_{f3}}{V_f}[\bar{C}]_3 \tag{12}$$

式中，$[\bar{C}]_i(i=1,2,3)$分别为由 X 向、Y 向和第三向纤维增强的三部分材料的刚度矩阵。

最后得到材料的本构关系：

$$\{\sigma_x\} = [C_z]\{\varepsilon_x\} \tag{13}$$

4 算例及其验证

为了对所建立的本构关系进行验证，本文以玻璃纤维无捻纱为增强材料，以不饱和聚酯树脂为基体，按照图 1 所示的结构编制了三维复合材料。

4.1 组分材料弹性常数的确定

在计算三维复合材料的刚度系数时，基体的弹性常数通过对树脂浇注体的测试直接确定；而玻璃纤维的弹性模量则通过测定一定纤维含量 V_f' 的单向复合材料的弹性模量 E_L'，再结合

基体的弹性模量 E_m'，由预测公式 $E_L'=E_f'V_f'+(1-V_f')E_m'$ 计算确定，泊松比采用块玻璃的值。见表 1。

表 1 组分材料的弹性常数

材 料	弹性模量(MPa)	泊松比	剪切模量(MPa)
聚酯树脂	2.05×10^3	0.43	0.72×10^3
玻璃纤维	6.95×10^4	0.22	2.85×10^4

4.2 纤维体积含量计算

取图 2 所示的单元体，量得尺寸为：

$$U=0.768\text{cm},\quad V=0.875\text{cm},\quad W=0.530\text{cm}$$

又测得三维复合材料中所用径向、纬向和第三向的纤维纱的线密度为：

$$d_1=0.4746\text{g/m},\quad d_2=0.5500\text{g/m},\quad d_3=2.833\text{g/m}$$

已知纤维的体密度 $\rho=2.54\text{g/cm}^3$。n=17 层。则由(2)和(3)可得三个方向纤维占总体积的分数分别为 $V_{f1}=7.9\%,\quad V_{f2}=7.9\%,\quad V_{f3}=4\%$

而纤维的总体积含量为： $V_f=V_{f1}+V_{f2}+V_{f3}=19.8\%$

4.3 本构关系的确定及验证

由(1)可计算出图 2 所示对角线纤维的方向参数 $[\theta,\beta]_3=[65.5°,41.3°]$。

通过组分材料的基本常数，可由有关预测公式算出各部分单向复合材料的弹性常数；并由(11)可得各部分正轴刚度矩阵 $[C]$ 的各元素；再按(7)计算各部分偏轴刚度矩阵 $[\bar{C}]_i$。应当注意，在计算由对角线纤维增强部分的 $[\bar{C}]_3$ 时，按照图 2 所取的坐标系，图 1 所示的材料中有四种不同的第三向纤维取向，即：[65.5°,41.3°][65.5°,138.7°]，[114.5°,41.3°][114.5°,138.7°]。因此(12)中的 $[\bar{C}]_3$ 应为按以上四种方向参数计算的平均值。最后由(12)得到材料的总刚度矩阵：

$$[C_z]=\begin{bmatrix}9395 & 2303 & 1939 & 0 & 0 & 0\\ 2303 & 9153 & 1884 & 0 & 0 & 0\\ 1939 & 1884 & 3426 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1239 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1278 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1326\end{bmatrix}(\text{MPa}) \tag{14}$$

其逆矩阵为：

$$[A]=[C_z]^{-1}=\begin{bmatrix}125.5 & -17.4 & -58.5 & 0 & 0 & 0\\ -17.4 & 127.1 & -58.1 & 0 & 0 & 0\\ -58.5 & -58.1 & 358.3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 851.3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 837 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 839.7\end{bmatrix}\times10^{-6}(\text{MPa}) \tag{15}$$

显然有： $$\{\varepsilon_x\}=[A]\{\sigma_x\} \tag{16}$$

下面采用单轴拉伸试验来比较理论和实验的结果。在单轴拉伸作用下，有

$$\sigma_y=\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{zx}=\tau_{xy}=0$$

本文仅对在 σ_x 作用下试件的纵向应变 ε_x 和横向应变 ε_y 进行了测定，所得到的应力应变曲线如图 3 和图 4 中的①线；而由(16)可知：

$$\varepsilon_x = 125.5\times10^{-6}\sigma_x,\qquad \varepsilon_y = -17.4\times10^{-6}\sigma_x \tag{17}$$

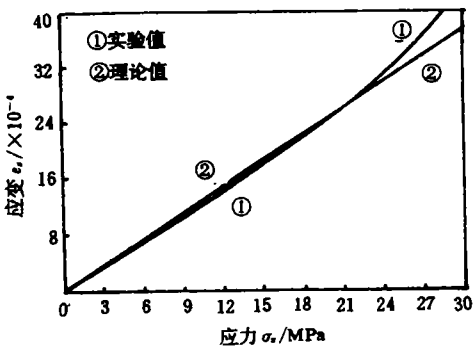

图 3　三维复合材料的 $\varepsilon_x-\sigma_x$ 曲线

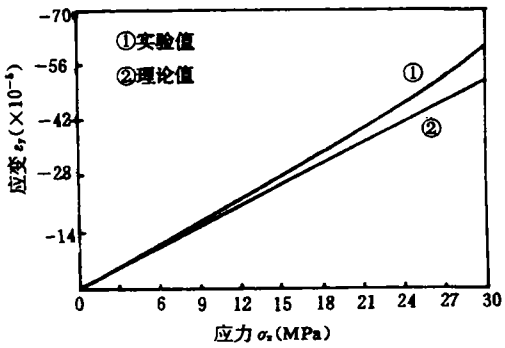

图 4　三维复合材料的 $\varepsilon_y-\sigma_x$ 曲线

上式是从本文所建立的本构关系中得到的应力应变关系，显然它们是两条直线，见图 3 和图 4 中的②线。

比较理论与实验结果，可见在荷载较低时吻合较好，由(17)可得弹性模量和泊松比为

$$E_{11} = 7968\text{MPa},\qquad \mu_{12} = 0.14$$

而由实验曲线的线性段反映的弹性模量和泊松比为：

$$E_{11}'=8440\text{MPa},\qquad \mu_{12}'=0.16$$

从图中也可看出，当载荷较高时，理论与实验结果偏差增大，这是因为材料出现了一定的非线性变形，而本文假设材料是在线性范围内的。

5　三维复合材料与层合板性能的比较

为了分析三维复合材料的性能特点，本文采用相同的材料和工艺制做了层合板，并尽量保证其纤维总体积含量与三维复合材料相同，然后对这两种材料进行简单的对比试验。这里只比较了它们的面内弹性模量和层间剪切强度。在做剪切强度试验时，试件的形式如图 5 所示。

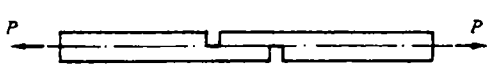

图 5　层间剪切试件

试验在 INSTRON 试验机上进行，所测得的弹性模量与层间剪切强度的平均值分别为：

层合板($V_f=19.6\%$)：　$E_{11}=8660\text{MPa}$

$\tau_{13}^b=11.24\text{MPa}$

3D 复合材料($V_f=19.8\%$)：　$E_{11}=8440\text{MPa}$

$\tau_{13}^b=18.46\text{MPa}$

通过试验发现，在纤维含量基本相同的情况下，三维复合材料的面内弹性模量略低于层答材料；但是层间剪切强度却高出层合板 60%以上。从破坏断面形式观察，三维复合材料的断面

不是平整的，没有出现分层现象。

6 结 语

以上的理论分析和实验结果表明，本文所建立的分析模型是基本正确的，其分析结果与实验较接近，基本上反映该种纺织结构材料的本构关系。从刚度矩阵(14)可知，尽管第三向纤维不是正交的，但是只要纺织时有一定的对称规律性，其宏观上仍是正交异性的。此外，本文的实验结果表明三维复合材料克服了层合复合材料层间性能差的缺点，使其综全性能得到了较大的改善。

参 考 文 献

1 Ko F K, Pastre C M, Lei C, Whyte D W. A fabric Geometry model for 3—D braid reinforced FP/Al—Li Composites. Competitve Advancements in Metals/Metals Processing, SAMPE Meeting, Cherry, NJ, Aug18—20, 1987

2 Ko F K. Advanced textile structural composites. 常州聚氨酯、复合材料国际讲学交流会，1991

3 Whtney T J, Chou T W. Modeling of 3—D angle—inclination model of threedimensional textile structural composites. J Comp Mater, 1989; 23; 890

4 Yang JM, Ma CL, Chou T W. Fiber inclination model of three—dimensional textile structural Composites. J Comp Mater, 1986; 20: 472

5 杨桂，刘方龙. 具有广阔发展前途的纺织结构复合材料. 九十年代我国复合材料发展展望研讨会，中国宇航学会，1990

6 Jany B, Chang WC. Structure—property relationships in three dimensionally reinforced fibrous composites, Advanced Composites, The latest Development, Proceed of the Second Conf. Michigan, 1986: 183

7 Ko F K, Pastore C. Structure and property of hybrid SiC/Al composites, Presented at MMC'88 Conf. Philadelphia, PA, 1988

CONSTITUTIVE RELATION AND PROPERTIES ANALYSIS OF A 3-D TEXTILE COMPOSITE MATERIAL

Yan Shilin Shen Darong Wang Manting

(Eng. Mech. Dept., Whuhan University of Technology, Wuhan 430070)

Abstract This paper studies the structure and property of 3-D reinforced fibrous composites. A micromechanical model is established by analysing a kind of 3-D manual textile structural composite, and based on this analytical model, the constitutive relation reflecting its macro-properties is obtained. Some experiments are carried out to prove the theoretical results of this paper by using the 3-D composites specimens that have the same textile structure. In addition, the contrastive tests are done between the 3-D reinforced composites and laminated composites. It shows that the average properties of composites, especially the interlayer property, are greatly improved and increased because of the 3-D reinforcement.

Key words 3-D reinforced composites, analytical model, constitutive relation, property analysis