第 12 卷 第 4 期 复 合 材 料 学 报 Vol. 12 No. 4
1995 年 12 月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Dec. 1995

含损伤软化材料层合板承压时的分叉分析*

沈成武* 戴诗亮 孙 巍
（武汉交通科技大学土建系，武汉 430063）（清华大学工程力学系）（广西师范大学数学系）

摘 要 本文讨论了由纤维和树脂-损伤应变软化材料组成的层合板在面内受压时的压缩分叉。用有限变形理论和半解析有限元法建立了相应的分叉方程，并进行数值模拟。计算结果表明，分叉将在损伤材料的应变软化阶段发生，为剪切带形分叉，损伤材料内有剪应变集中，而且在纤维和树脂的界面附近有较大的剪应变突变等现象

关键词 层合板，分叉，损伤，应变软化

1 前 言

复合材料层合板受面内压缩时，纤维可能发生压缩皱折、剪切皱折和分层等形式的破坏[1]。我们曾就弹塑性强化材料层板的分叉屈曲现象作过讨论[2,3]。而实际上层合板中的环氧树脂层主要呈现脆性，以损伤应变软化的本构关系加以描述更为合理。而复合材料的损伤往往呈各向异性，由于从纵向微屈曲（分叉）的观点来讨论含损伤应变软化材料层合板的文献尚不多见，作为理论性探讨，本文将树脂层的损伤看作是各向同性的，运用文献[4]的损伤模型，推导出增量形的损伤本构关系，采用有限变形理论和半解析有限元法建立相应力学模型的分叉方程组，算例计算表明，在树脂层内将出现剪切带形分叉，有较大的剪应变集中发生，纤维和树脂的界面附近有很大的剪应变突变等。以上现象的数值模拟将为探讨复合材料的破坏机理提供新的认识。

2 含损伤应变软化材料层合板的数学力学模型

2.1 脆性损伤应变软化材料的本构关系[4]

因损伤引起的材料弱化过程是不可逆的，引入各向同性损伤参量 $D(0\leqslant D\leqslant 1)$ 以反映材料的弱化水平。初始无损伤时 $D=0$，而材料完全丧失刚度时 $D=1$，它是一个单调增的标量，即 $\dot{D}\geqslant 0$。对于复杂的应变状态，定义正值的等效应变 ε_d，当 ε_d 增加且等于其门槛值 $K(K\geqslant 0)$ 时，损伤也增大，否则将保持常值，即

$$\begin{aligned} &\dot{D}>0 \qquad \text{当 } \dot{\varepsilon}_d>0 \text{ 且 } \varepsilon_d=K \text{ 时} \\ &\dot{D}=0 \qquad \text{当 } \dot{\varepsilon}_d\leqslant 0 \text{ 或 } \varepsilon_d<K \text{ 时} \end{aligned} \tag{1}$$

本文于 1994 年 1 月 5 日收到修改稿，1993 年 7 月 10 日收到初稿
国家自然科学基金资助项目

对于损伤等效应变的门槛值的变化率，亦作如下假定

$$\dot{K} = <\dot{\varepsilon}_d> \tag{2}$$

其中$<\zeta>=\frac{1}{2}(\zeta+|\zeta|)$。在应变空间中，满足 $\varepsilon_d(\varepsilon)-K=0$ 的应变张量集构造了一个损伤曲面，应变处于曲面内部时材料特性是可逆的，只有处于损伤曲面上才可能发生损伤扩展。设损伤演化服从如下的幂律

$$D=\begin{cases}\alpha<\dot{\varepsilon}_d>\varepsilon_d^m(1-D)^{-n} & \text{当 } \dot{\varepsilon}_d>0 \text{ 且 } \varepsilon_d=K \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } \varepsilon_d\leqslant 0 \text{ 且 } \varepsilon_d<K \text{ 时}\end{cases} \tag{3}$$

其中 α、m 和 n 均为大于零的材料常数。

由于损伤 D 与演化的门槛值 K 都是时间的非减函数，(3)式可改写成

$$\dot{D}=\alpha<\dot{K}>K^m(1-D)^{-n} \tag{4}$$

当材料的损伤初值为 D_0 和 K_0，而临界的破坏门槛值 K_c 对应有 $D(K_c)=1$。通过对(4)式直接积分可得

$$\alpha=\frac{m+1}{n+1}\frac{(1-D_0)^{n+1}}{K_c^{m+1}-K_0^{m+1}} \tag{5}$$

可用主应变 $\varepsilon_j(j=1,2,3)$来定义等效应变 ε_d

$$\varepsilon_d=\beta\Big[\sum_{j=1}^{3}(<\varepsilon_j>^2+h^2<-\varepsilon_j>^2\Big]^{1/2} \tag{6}$$

这里，$\beta>0$ 为校正乘子，而 $0<h\leqslant 1$ 表示压缩时由于裂纹闭合使损伤影响小于拉伸状况的效应参数。当材料的拉压强度不同时，设压拉的强度比为 η，根据材料单轴压缩和拉伸的特例，可确定(6)式中的 β 和 h 为

$$\beta=\left[\frac{\eta^2-2\nu^2}{\eta^2(1-4\nu^4)}\right]^{1/2},\quad h=\left[\frac{1-2\nu^2\eta^2}{\eta^2-2\nu^2}\right]^{1/2} \tag{7}$$

其中 ν 为材料的泊松比，并认为它在损伤过程中是不变的。

一旦确定了材料的损伤值 D 之后，材料的本构关系可表示成

$$\underset{\sim}{\sigma}=(1-D)\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{\varepsilon} \tag{8}$$

$\underset{\sim}{\sigma}$、$\underset{\sim}{\varepsilon}$分别为应力和应变张量，而 $\underset{\sim}{M}$是无损伤时材料的弹性张量。

由于损伤是一个不可逆、非线性的演化过程，采用增量形式的本构关系更为方便。为此对(8)式微分，并利用(3)、(6)式可得到主应力与主应变速率之间用矩阵表示的增量形本构关系

$$\dot{\underset{\sim}{\sigma}}=\underset{\sim}{\overline{M}}\,\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} \tag{9}$$

其中

$$\underset{\sim}{\overline{M}}=\underset{\sim}{M}\left[(1-D)\underset{\sim}{I}-\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\varepsilon_d}\underset{\sim}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon_d}{\partial\underset{\sim}{\varepsilon}_j}\right)^T\right] \tag{10}$$

$\underset{\sim}{I}$ 是单位矩阵，$\left(\frac{\partial\varepsilon_d}{\partial\underset{\sim}{\varepsilon}_j}\right)^T=\left(\frac{\partial\varepsilon_d}{\partial\underset{\sim}{\varepsilon}_1},\ \frac{\partial\varepsilon_d}{\partial\underset{\sim}{\varepsilon}_2},\ \frac{\partial\varepsilon_d}{\partial\underset{\sim}{\varepsilon}_3}\right)$

$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\varepsilon_d}$和$\frac{\partial\varepsilon_d}{\partial\varepsilon_j}$不难通过(3)和(6)式确定。

2.2　受压层合板的分叉分析

对于受压层合板的有限变形，采用修正的 Lagrange 描述法，设基准状态时共有 W 层的层合板，其第 k 层的体积为 V_k，表面积为 A_k，质点坐标是 x_j，可有如下增量形式的虚功原理[5]

$$\sum_{k=1}^{W}\int_{V_k}(\sigma_{mj}\frac{\partial v_i}{\partial x_m}+\dot{S}_{ij})\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j}\mathrm{d}V=\sum_{k=1}^{W}(\int_{A_k^t}\dot{\bar{t}}_i\delta v_i\mathrm{d}A+\int_{V_k}\dot{F}_i\delta v_i\mathrm{d}V) \tag{11}$$

其中 σ_{ij} 为 Cauchy 应力，S_{ij} 是第 2 Piola-Kirchhoff 应力，v 为质点的速度，$\dot{F}$ 和 $\dot{t}$ 分别是体积力和给定表面力的增量，A_k^t 为给定力的表面。

对于有限变形问题，材料的本构关系应该由具有客观性的物理量表示，为此第 2 Piola-Kirchhoff 应力的 Jaumann 速率 $\dot{S}_{ij}$ 与应变速率 $\dot{\varepsilon}_{kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l}+\frac{\partial v_l}{\partial x_k}\right)$ 之间有

$$\dot{S}_{ij}=\bar{M}_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} \tag{12}$$

这里 $\bar{M}_{ijkl}$ 就是(10)式定义的损伤材料的增量形弹性张量，弹性的纤维层可认为是 $D=0$ 的损伤材料。根据 Cauchy 应力与第 2 Piola-Kirchhoff 应力之间的关系，(12)式可改写成

$$\dot{S}_{ij}=(\bar{M}_{ijkl}-F_{ijkl})\dot{\varepsilon}_{kl} \tag{13}$$

而

$$F_{ijkl}=\frac{1}{2}(\delta_{ik}\sigma_{jl}+\delta_{il}\sigma_{jk}+\delta_{jk}\sigma_{il}+\delta_{jl}\sigma_{ik})$$

层合板受面内 x_1 方向均匀压缩时，其基本解是各层沿压缩方向有均匀应力 σ_{11} 且 $\sigma_{22}=\tau_{12}=0$，整个层板在压缩方向的应变 ε_{11} 相等。当此应变量超过某限度(分叉应变值)时，则板内将出现分叉现象，即对应的边值问题存在有不同于上述基本解的解。设此解与基本解之差称作分叉解，其相应的位移速率用 v^* 表示。此分叉解必将满足平衡方程和齐次边界条件，对应的变分形式为

$$\sum_{k=1}^{W}\int_{V_k}(\sigma_{mj}\frac{\partial v_i^*}{\partial x_m}+\dot{S}_{ij})\frac{\partial \delta v_i^*}{\partial x_j}\mathrm{d}V=0 \tag{14}$$

采用半解析有限元法求解，设法使沿板长(x_1)的压缩方向的分叉变形可以对 x_1 作显式积分，这样将使计算工作量大为减少。而在板厚的 x_2 方向划分直线单元，每单元三个结点，其结点位移速率的分叉解为 $\dot{u}_{ii}^*$ 和 $\dot{v}_{ii}^*$ (i=1，2，3)。引进形函数 $\varphi_i(x_2)$，则单元内的分叉位移速率可用结点值表示为 $\dot{u}^*=\sum_{i=1}^{3}\varphi_i(x_2)\dot{u}_{ii}^*$，$\dot{v}^*=\sum_{i=1}^{3}\varphi_i(x_2)\dot{v}_{ii}^*$。对于长为 l 的层板($x_1=0\sim l$)，考虑到分叉解的对称性和边界条件，可认为结点的分叉位移速率有如下形式

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}_{1i}^*&=A_1\sin\frac{p\pi x_1}{l}\\ \dot{v}_{1i}^*&=B_1\sin\frac{q\pi x_1}{l}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

其中 p 为偶数，而 q 为奇数，下标 I 为结点在整体层板中的编号，将(15)式代入(14)式，作变分处理后，可得到关于 A_1 和 B_1 的有限元离散的分叉方程

$$\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{O} \tag{16}$$

这里 $\underset{\sim}{A}=\{A_1B_1A_2B_2\cdots A_NB_N\}^T$，$N$ 是结点总数。总体刚度矩阵 $\underset{\sim}{K}=\sum_{k=1}^{W}\sum_{b=1}^{m_k}\underset{\sim}{K}^e$，而 $\underset{\sim}{K}^e=\int_0^l\left[\int_s\underset{\sim}{Q}^e\mathrm{d}x_2\right]\mathrm{d}x_1$，其中 m_k 是第 k 层的单元个数，则 S 是各单元 x_2 方向的长度。积分核 $\underset{\sim}{Q}^e$ 的子阵 $\underset{\sim}{Q}_{ij}^e(i,j=1,2,3)$ 有以下形式

$$\underset{\sim}{Q}_{ij}^e=\begin{bmatrix}(\bar{M}_{11}+3\sigma_1)\varphi_i\varphi_j(qC_q)^2+(\bar{M}_{33}+\frac{1}{2}\sigma_{11})\varphi_i'\varphi_j'S_q^2 & (\bar{M}_{12}\varphi_i\varphi_j'\bar{q}C_qS_p+(\bar{M}_{33}+\frac{1}{2}\sigma_{11})\varphi_i'\varphi_j'\bar{p}S_qC_p\\ (\bar{M}_{12}\varphi_i'\varphi_j'\bar{q}C_qS_p+(\bar{M}_{33}+\frac{1}{2}\sigma_{11})\varphi_i'\varphi_j'\bar{p}S_qC_p & (\bar{M}_{22}\varphi_i'\varphi_j'S_p^2+(\bar{M}_{33}+\frac{3}{2}\sigma_{11})\varphi_i\varphi_j(\bar{p}C_p)^2\end{bmatrix}$$

其中 $\bar{p}=\frac{p\pi}{l}$，$\bar{q}=\frac{q\pi}{l}$，$Sp=\sin\frac{p\pi x_1}{l}$，$Cp=\cos\frac{p\pi x_1}{l}$，$Sq=\sin\frac{q\pi x_1}{l}$，$Cq=\cos\frac{q\pi x_1}{l}$，$\varphi'_i=\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2}$。可以对 x_1 作解析积分，而对 x_2 作数值积分可求得单元刚度矩阵 $\underset{\sim}{K}^e$，然后迭加成总体刚度矩阵 $\underset{\sim}{K}$，它是压缩应变 ε_{11} 的非线性函数 $\underset{\sim}{K}(\varepsilon_{11})$。(16)式是一个广义特征值问题，受压层合板的分叉分析就是求使 $det\ \underset{\sim}{K}(\varepsilon_{11})=0$ 的压缩应变，即分叉压缩应变 ε_{11}^b 的值。

3　算例和讨论

作为算例，我们讨论由三层纤维(每层厚 4mm)和两层树脂(每层厚 3mm)叠合而成总厚为 18mm 的五层板，板长 l 为 100～1000mm。纤维层看作是弹性材料，其 $E_1=60.0$GPa，$\nu_1=0.30$；树脂层认为是损伤材料，其材料常数 $E_2=4.0$GPa，$\nu_2=0.23$。而压拉强度比 $\eta=2.0$，与损伤有关的其他材料常数取 $m=2.0$，$n=0.1$，初始损伤发生和临界破坏的门槛值分别为 $K_0=0.005$ 和 $K_c=0.03$。

由于层合板的宽度远大于其厚度，故在承受面内压缩时，可化作平面应变问题进行讨论。在分叉出现之前，x_1(长度)方向和 x_2(厚度)方向正好是应力和应变的主方向。由于损伤应变软化的树脂层其本构关系呈强非线性，采用增量法数值求解，x_1 方向的压缩应变增量取 $\Delta\varepsilon_{11}=-0.0001$。损伤材料的损伤量 D 及应力 σ_{11} 与压应变 ε_{11} 之间的关系，通过计算如图 1 所示。可知当 $\varepsilon_{11}=-0.011$ 时开始出现损伤，而 $\varepsilon_{11}=-0.0675$ 时 $D=1.0$ 材料完全破坏。在 $\varepsilon_{11}=-0.0436$ 时，应力 σ_{11} 绝对值达到极大 $\sigma_{11}=-152.99$MPa，对应的损伤 $D=0.2450$。其后若压缩应变继续增大，损伤材料将呈现应变软化的特性，即压应力反而减小。不过损伤量 D 则是压应变 ε_{11} 的单值(非线性)单调增函数。树脂层在成形过程中，难免存在微空洞、裂纹的初始缺陷。而损伤作为材料内部微空洞、裂纹发展的测度，为简单计，认为树脂为初始无损材料，在应力、应变($\varepsilon_{11}=-0.011$)水平较低时即出现损伤。这是由于损伤是一个渐变过程，以反映材料由微裂纹、空洞的发展使材料逐步弱化。由图 1 可知，材料出现初损伤后，即使应力增大，损伤发展并不快，如 $\sigma_{11}=130$MPa($\varepsilon_{11}\approx0.03$)时，$D$ 才只有 0.1。但进入应变软化阶段，则损伤突增，使微裂纹、空洞快速聚集，成宏观裂纹引起材料失效(破坏)。

对板长 $l=100$～1000mm 时几种分叉模态($p=2,4,6$；$q=1,3$)的层合板压缩分叉应变值 ε_{11}^b 作了计算。如果用 ${}_l\varepsilon_{(p,q)}^b$ 表示板长为 l，(15)式的分叉模态取 p、q 值时的分叉应变值的绝对值，则计算表明有

$$ {}_l\varepsilon_{(2,1)}^b={}_l\varepsilon_{(2,3)}^b<{}_l\varepsilon_{(4,1)}^b={}_l\varepsilon_{(4,3)}^b<{}_l\varepsilon_{(6,1)}^b={}_l\varepsilon_{(6,3)}^b $$

因为 p、q 分别是受压板纵向(长度方向)和横向(厚度方向)分叉模态的波数，为何横向分叉模态不影响压缩分叉应变值呢？通过乘幂法求(16)式的特征向量 $\underset{\sim}{A}$ 之后得到了解释。$\underset{\sim}{A}$ 中与横向分叉模态有关的分量 $B_I=0(I=1,\cdots,N)$，即(在我们计算的板几何尺寸下)板没有发生横向屈曲，由于全部 B_I 都为零，所以 q 的取值并不影响分叉应变的计算结果，故在图 2 中仅标出分叉模态 p 的值。图 2 给出了 $p=2,4,6$ 三种情况的压缩分叉应变值 ε_{11}^b 与板长 l 的关系曲线。为了便于比较，也给出了同等厚度(厚为 18mm)树脂板的分叉应变值。当然其分叉应变也(会类似于层合板)随板长 l 的增大而降低，并趋向某水平渐近线。数值计算结果表明，在 $l=100$～1000mm 的范围内树脂板的分叉应变值稳定于 -0.0445，低于纤维/树脂层合板的压缩分叉应变值，由此可知由于纤维层的存在将抑制分叉现象的过早发生。由图 1 可知，当压缩应变超过

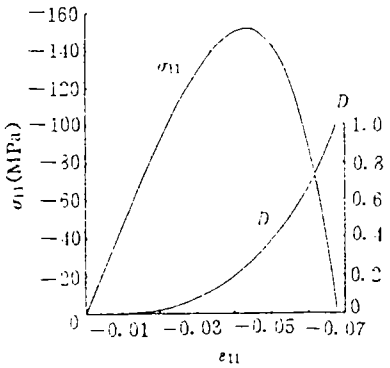

图 1 压应变 ε_{11}、与应力 σ_{11} 损伤 D 的关系曲线

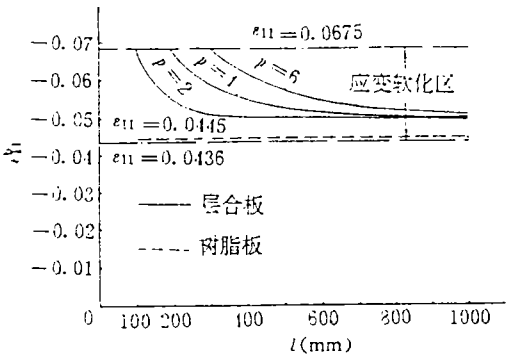

图 2 不同板长 l 情况下的分叉压缩应变值 ε_{11}^b

-0.0436 之后，损伤的树脂将有应变软化现象发生，而无论是层合板还是树脂板均在应变软化的范围内才出现压缩分叉。当 ε_{11} 到达 -0.0675 时，损伤材料已完全破坏，其后的变形已不属于我们所关心和讨论的问题，因此图 2 中不再标明。值得指出的是，总是最小的压缩应变 ε_{11}^b 所对应的分叉模态是真实的分叉。由图 2 可知，板长 $l=100\sim1000$mm 范围内只是出现 $p=2$ 的纵向压缩分叉。

压缩分叉出现后，将会改变层板受简单均匀压缩的变形状态，有可能出现剪切变形。本文的方法虽无法跟踪后分叉路径，但可以了解分叉发生后层板内变形的变化趋势。为此以 $l=1000$mm 层板产生 $p=2$ 的分叉模态情况为例，用乘幂法求 $\varepsilon_{11}=-0.0490$，即压缩分叉发生时刻的特征向量 $\underset{\sim}{A}\{\underset{\sim}{A_I},\underset{\sim}{B_I}\}$，由于 $B_I=0$，现将各结点的 A_I 值绘于图 3，可知在纤维层内 A_I 几乎是等值，曲线呈水平状，而在树脂层内 A_I 有较大的变化。各单元内的剪应变速率可以通过下式计算

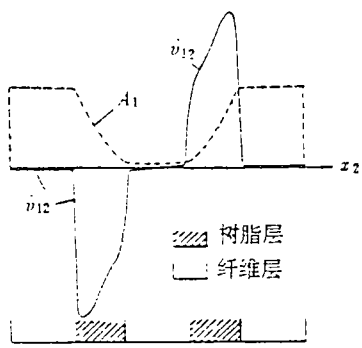

图 3 因压缩分叉引起的树脂层剪切应集中现象

$$\dot{v}_{12}=\sum_{i=1}^{3}A_i\phi_i(x_2)\sin\frac{p\pi x_1}{l}$$

其中 A_i 是该单元三个结点所对应的特征向量 $\underset{\sim}{A}$ 的分量。其计算结果亦表示在图 3 中，可知在纤维层内剪应变速率的水平很低，而树脂层内有较大的剪切应变速率集中。所以，层合板的压缩分叉表现为因损伤应变软化使得树脂层内形成剪切带形的分叉，并且在纤维和树脂层的界面上，剪应变会有较大的突变，可能引起层间剪切脱层。

4 结 论

本文讨论了由纤维和树脂叠合而成的层板在受面内单向均匀压缩时的分叉现象。将树脂作为损伤应变软化材料考虑，将有(1) 当板的长厚比不很大时，在板出现整体横向屈曲之前，会发生纵向压缩分叉；(2) 压缩分叉在损伤材料的应变软化段才出现；(3) 这种分叉是树脂层的剪切带形分叉，层内有较大的剪应变集中现象发生；(4) 在纤维和树脂层的界面上有剪应变突变，可能引起剪切脱层。

本文由于采用半解析有限元法,虽然计算量小,但只能定性地给出树脂层内剪应变速率的分布,要跟踪压缩分叉发生后的后屈曲现象是无能为力的。尤其是需要模拟层板的破坏过程,还必须用平面和三维有限元或其他方法进行更深入的研究。

参 考 文 献

1 周履,王震鸣,范赋群. 复合材料及其结构的力学进展 第一册. 广州:华南理工大学出版社,1991:243—260

2 沈成武,冯振兴,叶碧泉. 单向承拉层合板的塑性分叉现象. 复合材料学报,1988;5(4):56—65

3 沈成武,叶碧泉,周安宁. 单向承压层合板纤维微屈曲的有限元分析. 复合材料学报,1991;8(1):91—98

4 Brekelmans W A M, Schreurs P J G, de Vree J H P. Continuum damage mechanics for softening of brittle materials. Acta Mechanica, 1992; 93(1): 133—143

5 Tomita Y, Shindo A. On the bifurcation and post-bifurcation beheviour of thick circular elastic-plastic tubes under lateral pressure. Comput Method Appl Mech Engrg, 1982; 35: 207—217

BIFURCATION ANALYSIS OF LAMINATED PLATE WITH DAMAGE SOFTENING MATERIALS UNDER UNIAXIAL COMPRESSION

Shen Chengwu[1]　　Dai Shiliang[2]　　Sun Wei[3]

(1 Department of Civil Engineering, Wuhan Transportation University, Wuhan 430072)

(2 Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing, 100084)

(3 Department of Mathematics, Guangxi Normal University, Guilin)

Abstract　The compressive bifurcation of a laminated plate composed of fibers and matrix under uniaxial compression, which is assumd to be a damage strain softening material, is investigated. Using the finite deformation theory and semi-analytical finite element method, the bifurcation equations are established, and then a numerical simulation is evaluated. The results show that the bifurcation occurs during a strain softening of the damage materials, and this bifurcation is a one of shearing band. In a damaged material the shear strain is concentrated and the shear strain jumping appears in the neighbourhood of an interface between the fibers and matrix.

Key words　laminated plate, bifurcation, damage, strain softening