第 12 卷 第 4 期 复 合 材 料 学 报 Vol. 12 No. 4
1995 年 12 月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Dec. 1995

复合材料层压板振动参数的铺层顺序优化研究

杨 海 黄 琦 丁惠梁
(航空工业总公司第 623 研究所，西安 710061)

摘 要 本文针对目前在复合材料结构设计中较少考虑的振动特性优化问题，采用减缩区间法与枚举法相结合的手段，对给定层数和角度的层压板进行了铺层顺序的优化研究，使其满足振动频率和模态阻尼的要求。通过对 20 层对称层板的计算可以看出，采用本文所述方法，不仅可节省大量计算时间，而且所得的频率和比阻尼容量值与实验结果具有良好的一致性，证明了该方法的可靠性。本文的研究可作为工程设计中一种有效的手段，所完成的软件具有一定的工程应用价值。

关键词 对称层板，振动参数，铺层顺序，优化，减缩区间

1 引 言

复合材料因其力学性能的可设计性而使其结构的优化设计成为人们所关注的问题。在以往的复合材料结构设计中，已按重量、稳定性、气动弹性剪裁等考虑了优化问题[1]。但很少考虑振动特性的优化问题。随着飞机性能的提高和对复合材料结构设计研究的不断深入，人们已逐渐认识到复合材料结构的动强度、振动特性优化设计方面具有很大的潜力。

目前，已提出关于层压板第一阶固有频率最大(或最小)的优化方法及其它一些有关动特性的优化设计方法，还不能直接应用于工程设计中，原因之一是尚无适用的工程化方法。在满足刚度、强度、重量要求的同时，考虑振动特性的优化设计问题，对铺层顺序进行优化从而得到较优的频率和阻尼特性是完全有可能的[2~6]。

本文讨论了如何在给定层数和铺设角度的情况下，实现在一定边界条件下的层压板铺层顺序优化，使其前几阶固有频率(尤其是第一阶到第三阶)达到最高(或最低)，使相应的模态比阻尼容量达到最高。文中就实现铺层顺序优化的理论及方法给出分析，寻求一种简单快捷的计算方法。

通过实例计算与试验结果的比较可以看出，采用本文所述方法所得计算结果与试验结果具有良好的一致性，证明了该方法的可靠性和算法的有效性。

2 铺层顺序优化的数学模型

对于一给定铺层厚度(层数)及铺设角的层压板，以铺层顺序作为设计变量，使其前几阶固有频率 f_i 达到最大的问题，可以描述成一个非线性规划问题求解：

寻找一组变量 $X=[X_1,X_2,\cdots,X_n]$

本文于 1994 年 3 月 5 日收到修改稿的，1993 年 8 月 16 日收到初稿；得到航空科学基金支持

使得

$$f(x_i) \rightarrow \max(\text{或}\min) \tag{1}$$

式中：x_i 为给定层数和铺设角度的铺序；f 为固有频率[2,3]。

对于上述问题，如以铺层顺序为设计变量，那么对一 $2N$ 层的对称层合板，其铺层顺序的情况为 $N!$ 种(如果 N 层的角度各不相同)；如果考虑到 N 层中只有 M 种($M<N$)不相同的角度，而每种角度的层数分别为 $N_1, N_2, \cdots, N_m$，则不相同的铺层方式共有：

$$P_n = \frac{N!}{N_1!N_2!\cdots N_3!} \tag{2}$$

另外，频率是一个不可分离的隐函数，一般以有限元方法由如下特征方程解出：

$$([K] - \omega^2[M])\{q\} = \{O\} \tag{3}$$

其中，$[K]$为总刚度阵；$[M]$为总质量阵。

设计向量$[X]$是不同角度的铺序，是一组不连续的变量，在区间$[X_1, X_n]$中取离散值。目前，还没有适于此类问题的比较成功的离散规划问题解法，大多只能采用枚举法(或穷举搜索法)来求解。如果直接把频率 f 作为目标函数，则每次都要求解方程(3)，计算周期和费用都是难以接受的。为此，我们对优化途径进行了探讨。

2.1 基于等效刚度系数的优化模型

对于选定的材料体系和工艺，层压板的纤维体积含量是常数，因此铺层顺序的改变对总质量阵$[M]$或单元质量阵$[M]_e$并没有影响，即对板的总体平均密度并不产生影响；铺层顺序的改变只对总刚度阵产生影响，且不同方向上刚度分布的改变，将影响结构的频率、振型和模态阻尼。

等效刚度系数是为了避免逐层计算的繁锁而在 YNS 理论的基础上发展起来的，它考虑了横向剪切变形的影响，并已成功地应用于复合材料层压板、层压加筋板的振动特性分析中[2,3]。在形成有限元元素刚度矩阵时，其形函数是由元素类型所决定的，其力学性能还是取决于等效弯曲刚度系数$[\overline{D}]$。

层压板的等效弯曲刚度系数 $\overline{D}_{ij}$的表达式为：

$$\overline{D}_{ij} = \frac{315}{17}\sum_{k=1}^{n}\overline{Q}_{ij}^{(k)}\left[\frac{1}{3h^3}(h_k^3 - h_{k-1}^3) - \frac{8}{15h^5}(h_k^5 - h_{k-1}^5) + \frac{17}{63h^7}(h_k^7 - h_{k-1}^7)\right]$$

$$i,\ j = 1,2,6 \tag{4}$$

$$\overline{D}_{ij} = \frac{15}{8}\sum_{k=1}^{n}\overline{Q}_{ij}^{(k)}\left[\frac{1}{h}(h_k - h_{k-1}) - \frac{8}{3h^3}(h3^k - h_{k-1}^3) + \frac{16}{5h^5}(h_k^5 - h_{k-1}^5)\right]$$

$$i,\ j = 4,\ 5$$

其余 $\overline{D}_{ij}=0$。

同样，等效阻尼刚度系数为：

$$[\overline{D}^d] = [\Psi][\overline{D}] \tag{5}$$

其中，$[\Psi]=\mathrm{diag}[\Psi_1, \Psi_2, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6]$

Ψ_1、Ψ_2 分别为 0°、90°铺层板的比阻尼容量；Ψ_4 为横向剪切比阻尼容量，$\Psi_5=\Psi_6$ 为纵向剪切比阻尼容量；$[\overline{D}^d]$为等效阻尼的刚度系数，且 $\overline{D}_{ij}^d \neq \overline{D}_{ji}^d$；$[\overline{D}]$为无阻尼等效刚度系数。

对式(4)进行分析可以发现，在给定层压板的层数和铺设角度的情况下，基于等效刚度系数$[\overline{D}_{ij}^d]$所建立的优化模型，其设计变量是铺层顺序，这样，我们可以认为上述优化问题是一单变量问题，变量的取值即为相同角度的不同排列顺序。只要有一最优解，即是全局最优解[9]。重

新描述原问题(1)成下列形式：

寻找变量 X 使得 $f(x)=\overline{D}_{ij}\rightarrow$极大(或极小)　　(6)

下面再对 $\overline{D}_{ij}$中随铺层顺序变化而变化敏感的项进行分析。

从数值试验结果看[5]，在四边简支、四边固支和悬臂等有边界约束的情况下，$\overline{D}_{11}$、$\overline{D}_{22}$的增加将导致固有频率的增加，$\overline{D}_{12}$、$\overline{D}_{66}$的增加将导致固有频率的降低，而在四边自由的情况下，上述结论则恰恰相反。

由于 9 个等效刚度系数是一组关联量，所以只要选取其中一个作为目标函数即可。数值试验结果表明，模态比阻尼容量主要取决于振型，如果只追求前几阶模态均有较大的阻尼，则可把相应变化敏感的几项 $\overline{D}_{ij}^{d}$作为目标函数即可。

3　求解方法

前面已谈到，对于离散规划问题目前尚无成熟的求解方法，如果采用“枚举法”或“穷举搜索”的方法，则对一铺层为 20 层的对称层合板，其可能的铺层情况竟达 3628800 种(如果 10 种铺层角度各不相同)，再加上对目标函数的计算，所耗费的机时是难以承受的。

值得庆幸的是，在航空结构中，层压壁板一般均采用 45°、－45°、0°、90°四种铺层。在用上述方法计算的所有铺层排列中就存在许多重复的铺层情况，为此我们采用式(2)，可求出不重复的铺层情况数，从而使铺层排列大大减少。例如对于一铺层情况为[45°/－45°/0_2°/－45°/45°/0°/90°/45°/－45°]$_s$的层压板，其不重复的铺层排列为 16800 种；但是对于一 40 层的对称板(假设 4 种角度比例不变)，其不重复铺层排列为 3.26×10^9 种，其计算量仍然很大。因此，必须寻求一种快捷的算法，以满足工程应用。

按文献[1]的介绍，复合材料层压板的表面铺层为±45°时，可改善其抗冲击破坏和抗压缩性能，并具有较好的使用维护性；另外，在工艺上要求避免过多的相同角度铺层的重叠(一般重叠数不大于 4)等等，这些均作为约束条件处理。通过对铺层排列情况的分析，我们把铺层的排列按铺层角度组的变化排队，并把约束条件处理成边界约束，在计算时首先按约束条件去寻找最优主方向区域，减缩掉那些不满足的区间，使问题限制在可行域内，然后再计算目标函数，直到选出最优的铺层为止——即把减缩区间法与枚举法或穷举搜索法相结合。

综上所述，对式(6)描述的线性规划问题，其计算流程见文献[10]；用于动特性计算的软件及方法已经过鉴定，可参阅文献[2]，[3]。这里不再详述。

4　算例及结果比较

为了考核计算模型、计算方法和程序的效率，我们计算了一 20 层的 C/E 对称铺层薄板(尽管对薄板的铺层顺序优化效果不很显著，但试验件的成本要低得多)，其铺层为：[45°/－45°/0_2°/－45°/45°/0°/90°/45°/－45°]$_s$；几何尺寸：长、宽均为 0.328m，厚 0.002001m；材料常数：$E_1=1.05\times10^{11}$Pa，$E_2=7.9\times10^{10}$Pa，$G_{12}=4.7\times10^9$Pa，$\mu_{12}=0.279$，$\rho=1568$kg/m^3；边界条件为四边固支。

表 1 中给出了分别以最大频率和最小频率为目标函数时所得的铺层结果、计算时间以及无外层约束时按最大频率优化出的铺层和计算时间；表 2 中给出了按优化后铺层计算出的频率和模态比阻尼容量的结果与原始铺层的结果比较，并给出相应的试验结果[8]。

从表 1 的结果可以看出，采用区间减缩法可节省 90%的计算时间；从表 2 可以看出，就此

表 1 按频率优化的铺序和计算时间对比

序号	结果 / 状态	优化后的铺层顺序	计算时间	
			未采取区间减缩	减缩区间法
	初始铺层	$[\pm45°/0_2°/\mp45°/0°/90°/\pm45°]_s$		
铺层一	按最大频率	$[\pm45°/0_2°/90°/0°/\pm45°/\mp45°]_s$	68′45″	6′05″
铺层二	按最小频率	$[\pm45°/\mp45°/\mp45°/0_2°/90°/0°]_s$	68′45″	6′05″
铺层三	按最大频率（无外层约束）	$[0_2°/90°/0°/\pm45°/\mp45°/\pm45°]_s$	68′40″	8′30″

表 2 频率、模态比阻尼容量的比较

状态	结果 / 模态	1		2		3		4	
		f(Hz)	Ψ(%)	f(Hz)	Ψ(%)	f(Hz)	Ψ(%)	f(Hz)	Ψ(%)
铺层一	理论值	314.2	3.32	587.6	3.35	602.2	2.49	882.1	2.84
	试验值	316.8	3.52	590.4	4.10	600.8	1.98	890.1	3.45
铺层二	理论值	304.4	3.36	566.89	3.14	577.0	2.82	877.3	2.86
	试验值	306.48	3.84	568.2	2.98	578.5	2.99	865.2	3.01
铺层三	理论值	317.8	3.29	597.2	3.41	612.8	2.37	883.9	2.84
	试验值	320.2	2.85	591.5	3.66	616.8	2.15		
初始铺层	理论值	311.9	3.31	581.1	3.44	596.8	2.41	881.0	2.84
	试验值	312.8	3.58	578.5	3.12	601.4	2.28		

注：铺层一、铺层二和铺层三是按表 1 中的顺序

算例来说，按最大频率（指有外层约束的）和最小频率规划出的铺层顺序，其第一阶固有频率相差近 10Hz，第二阶固有频率相差近 19Hz，第三阶频率相差近 24Hz。和初始铺层相比，按最大频率优化铺层的第一阶频率提高了 2.3Hz，第二阶提高了 6.47Hz，而按最小频率优化铺层的第一阶频率降低了 7.55Hz；第二阶频率降低了 14.24Hz。对壁板结构来说，这种量级的频率变化，足以调整结构的前三阶固有频率从而避开产生共振的频率。

如果板的层数增加（厚度增加），铺层顺序对其振动特性的影响程度将会更明显。从表 2 中还可以看出，如果不考虑最外两层的约束，则按最大频率规划出的层压板，其前几阶固有频率比初始铺层的要提高得更多。

从所示结果中可以看出，当 0°、90°铺层靠近外表面分布时，其固有频率上升，反之，当±45°铺层靠近外表面时，则频率下降，这一点和文献[1,5]中的结论相一致。

5 结 论

本文提出的通过优化铺层顺序而获得较优的振动特性的手段是可行的，而在优化过程中采用的区间减缩与穷举搜索相结合的方法是行之有效的，完全可以在微机上花较少的时间对

初始铺层进行动特性校核、改变频率等工作,对较厚的层压板,通过对频率随铺层顺序变化的分析,可帮助设计者修改设计参数。

通过本文的研究,可得出如下的结论:

(1) 本文提出的通过规划铺层顺序而优化层压板振动特性的理论及所采用的"区间减缩—穷举搜索法"是可行的,所完成的软件具有工程应用价值;

(2) 对于四边固支或简支的层压板,在不减少铺层数和不改变纤维含量的前提下,要降低固有频率,应把±45°铺层尽量往表层铺设,也可通过增加±45°铺层的比例来调整;

(3) 要提高层压板(四边固支或简支)的固有频率,则应把 0°/90°铺层尽量往外表面铺设,也可通过增加 0°/90°铺层的比例来调整,使避开产生共振的频率。

致　谢　本项研究工作在软件编制过程中,崔鲁青同志作了大量工作,在此表示感谢。

参 考 文 献

1 复合材料设计手册. 北京: 航空工业出版社, 1990

2 Yang Hai. The prediction of dynamic behavior of composite laminated stiffened plates by finite element method. C-MRS, 1991; 2: 165

3 杨海. 复合材料层压板振动特性有限元分析及计算报告. 航空航天部 623 所技术报告, 1985

4 [美]雷克莱斯 G V 等著, 孙彦兵, 丁惠梁等译. 工程最优化——方法与应用. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1990

5 崔鲁青. 层压板铺层顺序数值试验研究. 航空航天部 623 所技术报告, 1992

6 杨海. 铺层顺序优化计算任务书. 航空航天部 623 所技术报告, 1992

7 曹琦. 在四边简支边界条件下不同铺层顺序层压板的振动特性试验研究报告. 航空航天部 623 所技术报告, 1990

8 杨海. 利用瞬态技术对复合材料矩形平板、加筋板振动特性的试验研究. 航空航天部 623 所技术报告, 1988

9 [美]豪格 E J, 阿罗拉 J S 著, 郁永熙, 丁惠梁译. 实用最优设计——机械系统与结构系统. 北京:科学出版社, 1985

10 杨海. 层压板动特性铺层顺序优化计算报告. 航空航天部第 623 研究所技术报告, 1992

OPTIMUM DESIGN OF LAYER SEQUENCE FOR VIBRATION PARAMETERS OF COMPOSITE LAMINATES

Yang Hai　　Huang Qi　　Ding Huiliang

(Aircraft Strength Research Institute, CAE, Xi'an 710061)

Abstract　The method of reduced region is used to solve the layer sequence optimization problem of composite laminates that have the specified layer number and angles, to satisfy the requirements of vibration frequencies and modal damping. By means of calculation of a 20-ply symmetrical composite laminate, it can be shown that using this method can not only save a lot of computational time, but also make the frequencies and modal damping capacities coincide well with the experimental results, and thus the reliability of this method is proved. The research in this paper can be used as an effective method in engineering design, and the software is of special engineering value.

Key words　symmetrical composite laminate, vibration parameter, layer sequence, optimization, reduced region