第 13 卷 第 2 期 复 合 材 料 学 报 Vol. 13 No. 2
1996 年 5 月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA May 1996

法向应力和法向应变对复合材料层板自由振动基础频率的影响

张根全 任勇生 雷建平 王俊奎
(太原工业大学数力系,太原 030024) (北京航空航天大学,100083)

摘 要 一种包含法向应力,法向应变和横向剪切影响的复合材料层板自由振动的新位移模式在本文中提出。通过应用层板自由振动的 Rayleigh-Ritz 分析,比较了在简支边界条件下复合材料层板自由振动的 YNS 理论解[1]和本文新位移模式解,从而得出在简支边界条件下法向应力和法向应变对复合材料层板自由振动基础频率的影响。

关键词 法向应力,法向应变,基础频率

由于复合材料厚层板中横向剪切影响的存在,人们提出了各种各样的厚层板剪切变形理论,其中应用较广的是 YNS 理论和 Reddy 简化高阶理论。但是,这两种理论均忽略了法向应力 σ_z 和法向应变 ε_z 的影响。关于自由振动中,法向应力和法向应变影响这一问题,据作者所知,目前尚未见到有关文献。本文在 YNS 理论和文献[2]的基础上,采用 Legendre 多项式逼近位移场沿厚度方向的分布,提出了 u、v 为一阶,w 为二阶的新位移模式。通过应用 Rayleigh-Ritz 法,比较了简支边界条件下对称正交铺设层板自由振动的 YNS 理论和本文新位移模式解,得出了在简支边界条件下法向应力和法向应变对层板自由振动基础频率的影响。

1 新位移模式

采用与文献[2]类似的方法,把面内位移 u、v 展开为一阶 Legendre 表达式,将横向位移 w 展为二阶 Legendre 表达式:

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u^\circ(x,y,t) + \frac{h}{2}P_1(\xi)\psi_x(x,y,t) \\ v(x,y,z,t) &= v^\circ(x,y,t) + \frac{h}{2}P_1(\xi)\psi_y(x,y,t) \\ w(x,y,z,t) &= w^\circ(x,y,t) + \frac{h}{2}P_1(\xi)\psi_z(x,y,t) + \frac{h^2}{2}P_2(\xi)\phi_z(x,y,t) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中:$\xi=\frac{2z}{h}$,$P_1(\xi)$、$P_2(\xi)$分别是 ξ 的一阶、二阶 Legendre 多项式,u°、v°、w°、ψ_x、ψ_y、ψ_z、ϕ_z 是广义位移,均为 x、y 的函数。

把 $\xi=\frac{2z}{h}$ 代入(1)式,利用上下表面横向剪应力和剪应变为零的条件可知,ψ_z 仅为一常数,故略去 w 中的第二项,并且有

本文于 1994 的 11 月 28 日收到修改稿,1994 年 3 月 1 日收到初稿

$$\phi_{z,x} = -(4/h^2)(\psi_x + w^\circ_{,x}) \quad , \quad \phi_{z,y} = -(4/h^2)(\psi_y + w^\circ_{,y}) \tag{2}$$

于是,(1)式化简为

$$u = u^\circ + z\psi_x, \qquad v = v^\circ + z\psi_y, \qquad w = w^\circ + (\frac{3}{2}z^2 - \frac{h^2}{8})\phi_z \tag{3}$$

与 YNS 理论相比较可以看出,u°、v°、w°即为中面位移,ψ_x、ψ_y 分别为中面绕 y 轴和 x 轴的剪切转动。

应变分量为 $\varepsilon_x = u^\circ_{,x} + z\psi_{x,x}$, $\varepsilon_y = v^\circ_{,y} + z\psi_{y,y}$, $\varepsilon_z = 3z\phi_z$

$$\gamma_{yz} = \frac{3}{2}(1 - 4\frac{z^2}{h^2})(\psi_y + w^\circ_{,y}) \ , \ \gamma_{xy} = u^\circ_{,y} + v^\circ_{,x} + z(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \ ,$$

$$\gamma_{zx} = \frac{3}{2}(1 - 4\frac{z^2}{h^2})(\psi_x + w^\circ_{,x}) \tag{4}$$

层板第 k 层在 $x\ y\ z$ 坐标系中的应力-应变关系为

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix}\overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{13} & \overline{Q}_{16}\\ & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{23} & \overline{Q}_{26}\\ \text{对称} & & \overline{Q}_{33} & \overline{Q}_{36}\end{bmatrix}^{(k)}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}^{(k)}, \begin{Bmatrix}\tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix}\overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45}\\ \overline{Q}_{45} & \overline{Q}_{55}\end{bmatrix}^{(k)}\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}^{(k)} \tag{5}$$

2 层板的应变能和动能

层板的应变能为

$$U = \frac{1}{2}\int_v(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx} + \tau_{xy}\gamma_{xy})\mathrm{d}v \tag{6}$$

把(4)、(5)式代入(6)式,得到

$$U = U_1 + U_2 \tag{7}$$

其中:U_1 与 YNS 理论的应变能 U[1]相同,U_2 为新位移模式所增加的那部分应变能。对于对称正交铺设层板,有

$$U_2 = \iint\{3D_{13}\phi_z\psi_{x,x} + 3D_{23}\phi_z\psi_{y,y} + \frac{9}{2}D_{33}\phi_z^2 + (\frac{5}{8}A_{44} - \frac{9}{h^2}D_{44} + \frac{18}{h^4}F_{44})(\psi_y + w^\circ_{,y})^2$$
$$+ (\frac{5}{8}A_{55} - \frac{9}{h^2}D_{55} + \frac{18}{h^4}F_{55})(\psi_x + w^\circ_{,x})^2\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{8}$$

式中,

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, F_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\overline{Q}_{ij}(1, z, z^2, z^4)\mathrm{d}z \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, 6) \tag{9}$$

U_2 中除了含有与正应力和正应变有关的项外,还含有与横向剪切有关的项(后两项积分),计算表明(表 1),与横向剪切有关的项对于基础频率的影响较小,故可以把 U_2 近似看作由正应力和正应变引起的应变能增量。

层板动能为

$$T = \frac{1}{2}\int_v\rho(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)\mathrm{d}v \tag{10}$$

把(3)式代入(10)式,对于对称正交铺设层板,有

$$T = \frac{1}{2}\iint\{I_1[(\dot{w}^\circ)^2 + \frac{h^4}{64}\dot{\phi}_z^2 - \frac{h^2}{4}\dot{w}^\circ\dot{\phi}_z] + I_3(\dot{\psi}_x^2 + \dot{\psi}_y^2 - \frac{3}{8}h^2\dot{\phi}_z^2 + 3\dot{w}^\circ\dot{\phi}_z) + I_5\frac{9}{4}\dot{\phi}_z^2\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11}$$

式中,

$$(I_1, I_3, I_5) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho(1, z^2, z^4)\mathrm{d}z \tag{12}$$

3 简支边界条件下的 Rayleigh-Ritz 解

设简支边界条件为

$$\left.\begin{aligned} x=0,a:\quad & v^\circ=w^\circ=N_1=\psi_y=M_1=0 \\ y=0,b:\quad & u^\circ=w^\circ=N_2=\psi_x=M_2=0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

放松条件(2),对于对称正交铺设层板,满足上式中几何边界条件的近似解为

$$\left.\begin{aligned} w^\circ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} W_{mn}\sin\alpha x\sin\beta y\cos\omega t, \qquad \psi_x = \sum_{m,n=1}^{\infty} X_{mn}\cos\alpha x\sin\beta y\cos\omega t \\ \psi_y &= \sum_{m,n=1}^{\infty} Y_{mn}\sin\alpha x\cos\beta y\cos\omega t, \qquad \phi_z = \sum_{m,n=1}^{\infty} Z_{mn}\sin\alpha x\sin\beta y\cos\omega t \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

式中:$\alpha=m\pi/a$,$\beta=n\pi/b$ 。

把(14)式代入(7)、(8)式和(11)式,应用熟知的 Rayleigh-Ritz 过程,得到

$$\{[K]-\omega^2[M]\}\{\delta\}=0 \tag{15}$$

式中,$\{\delta\}$是由 W_{mn}、X_{mn}、Y_{mn}、Z_{mn}组成的特征向量。求解这一特征值问题,即可得到层板自由振动的各阶频率和振型。

应用 YNS 理论的应变能 U 和动能 T[1],与上面相同的过程,可以得到层板自由振动的 YNS 理论 Rayleigh-Ritz 解。

4 数值计算及结果

本文计算了简支边界条件下对称正交铺设层板自由振动基础频率的 YNS 理论和本文新位移模式的 Rayleigh-Ritz 解,通过这两种解的比较,得到了在简支边界条件下法向应力和法向应变对基础频率的影响。

层板材料为

$$G_{12}/E_2=0.6\ ,\ G_{23}/E_2=0.5\ ,\ \nu_{12}=0.25\ ,\ E_3=E_2,\ G_{13}=G_{12},\ \nu_{13}=\nu_{23}=\nu_{12} \tag{16}$$

当研究基础频率随 a/h 变化时,取 $E_1/E_2=E_1/E_3=40$;当研究基础频率随 $E_1/E_3(=E_1/E_2)$变化时,取 E_1/E_3 从 3 变到 40。

无量纲基础频率定义为

$$\bar{\omega}=\frac{\omega a^2}{h}\sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \tag{17}$$

法向应力和法向应变影响系数定义为

$$\eta=\frac{|\bar{\omega}_{\mathrm{YNS}}-\bar{\omega}_{\mathrm{NEW}}|}{\bar{\omega}_{\mathrm{YNS}}}\times 100\% \tag{18}$$

式中,$\bar{\omega}_{\mathrm{YNS}}$和 $\bar{\omega}_{\mathrm{NEW}}$分别表示 YNS 理论和本文新位移模式的 Rayleigh-Ritz 解。

U_2(式(8))中的横向剪切能量项对于层板基础频率的影响如表 1 所示。表中,$\bar{\omega}_{\mathrm{NEW1}}$和 $\bar{\omega}_{\mathrm{NEW}}$分别为 U_2 中忽略和不忽略横向剪切能量项所得到的无量纲基础频率。显然,U_2 中与横向剪切有关的能量项对于基础频率的影响很小,故可把 U_2 近似看作由正应力和正应变所产生的应变能增量,即,定义(18)是合理的。

简支边界条件下 4 层(0°/90°/90°/0°)层板自由振动的无量纲基础频率随 $E_1/E_3(E_1/E_2)$和 a/h 的变化分别如表 2,表 3 所示。由表 2 中的 YNS 理论 Rayleigh-Ritz 解 $\bar{\omega}_{\mathrm{YNS}}$与已有解的比较可以看出本文解法的可靠性。由 $\bar{\omega}_{\mathrm{NEW}}$和 $\bar{\omega}_{\mathrm{YNS}}$的比较可以看出法向应力和法向应变的影响使层板的基础频率提高。

本文解的收敛性亦可由表 2、表 3 看出,本文解法收敛较快。这与文献[1](计算 $\bar{\omega}_{\mathrm{YNS}}$)的结

论相同。

表 1 U_2 中的横向剪切能量项对于层板(0°/90°/90°/0°)基础频率的影响($a/b=1$)

	$a/h=5$			$E_1/E_2=40$	
	$\bar{\omega}_{NEW}$	$\bar{\omega}_{NEW1}$		$\bar{\omega}_{NEW}$	$\bar{\omega}_{NEW1}$
E_1/E_2	$m,n=1\sim2$	$m,n=1\sim2$	a/h	$m,n=1\sim2$	$m,n=1\sim2$
3	6.9860	6.9615	5	13.7754	13.5747
10	9.3577	9.2969	10	17.0169	16.9142
20	11.4128	11.2989	20	18.3559	18.3225
30	12.7751	12.6164	30	18.6466	18.6310
40	13.7754	13.5747	40	18.7521	18.7432

表 2 简支条件下(0°/90°/90°/0°)层板的无量纲基础频率随 E_1/E_3 的变化($a/h=5,a/b=1,E_2=E_3$)

	$\bar{\omega}_{NEW}$		$\bar{\omega}_{YNS}$			
E_1/E_2	$m,n=1\sim2$	$m,n=1\sim3$	$m,n=1\sim2$	[3]	[4]	η(%)
3	6.9860	6.9860	6.5695	6.6815	6.5597	6.3
10	9.3577	9.3577	8.2981	8.2103	8.2718	12.7
20	11.4128	11.4128	9.5671	9.5603	9.5263	16.2
30	12.7751	12.7751	10.3258	10.272	10.272	23.7
40	13.7754	13.7754	10.8540	10.752	10.787	26.9

表 3 简支条件下(0°/90°/90°/0°)层板的无量纲基础频率随 a/h 的变化($E_1/E_2=E_1/E_3=40,a/b=1$)

	$\bar{\omega}_{NEW}$		$\bar{\omega}_{YNS}$	$\bar{\omega}_{CPT}$	η(%)
a/h	$m,n=1\sim2$	$m,n=1\sim3$	$m,n=1\sim2$ $m,n=1\sim3$		
5	13.7754	13.7754	10.8541	18.9645	26.9
10	17.0169	17.0169	15.1425	18.9645	12.4
20	18.3559	18.3559	17.6596	18.9645	3.9
30	18.6466	18.6466	18.3085	18.9645	1.8
40	18.7521	18.7521	18.6245	18.9645	0.6

5 结 论

通过以上分析,得出如下结论:

(1) 在简支边界条件下法向应力和法向应变总的影响使层板的刚度增加,基础频率提高。

(2) 法向应力和法向应变对于基础频率的影响随着 $E_1/E_3(E_1/E_2)$ 的增加而增加,随着 a/h 的增加迅速下降。

(3) 当 a/h 较小时(<20),法向应力和法向应变的影响不可忽略。

参 考 文 献

1 张根全 等. 角交铺设厚层板自由振动的里兹法解. 工程力学增刊, 1993, 664～669
2 付晓华, 陈浩然, 王震鸣. 复合材料多层厚板的精化高阶理论及其有限元素法. 复合材料学报, 1992, 9(2): 39～46
3 Noor A K. AIAA J, 1972, 11(7): 1038～1039
4 Phan N D, Reddy J N. Int J Num Meth Engng, 1985, 21: 2201～2219

EFFECTS OF NORMAL STRESS AND NORMAL STRAIN ON THE FUNDAMENTAL FREQUENCIES OF FREE VIBRATIONS OF COMPOSITE LAMINATED PLATES

Zhang Genquan　Ren Yongsheng　Lei Jianping
(Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024)

Wang Tsunkuei
(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 100083)

Abstract　A new displacement model of free vibrations, including effects of normal stress, normal strain and transverse shear deformation, is developed in this paper. The new model solutions are compared with the YNS theory solutions using Rayleigh-Ritz method for free vibrations, and the effects of transverse normal stress and normal strain on the fundamental frequencies of free vibrations of composite laminated plates with simply-supported edges are obtained.

Key words　normal stress, normal strain, fundamental frequencies

(上接第 83 页)

邦航空管理局从 1984 年起在"飞机结构通用规范 MIL-A-87221"中首先提出损伤容限的要求,目前这一研究领域工作可分为如下七个方面内容:(1)冲击能谱;(2)冲击能量与冲击力的关系;(3)冲击历程中冲击力与时间变化规律;(4)冲击损伤特征的测定与预测;(5)在压缩载荷作用下损伤的萌生门槛值和损伤扩展的规律;(6)多次冲击下含损伤结构的行为;(7)含损结构的剩余强度和刚度。由于在冲击荷载下复合材料结构损伤行为极其复杂,从近年来公开发表和本届大会上发表的论文看,现有分析模型和方法还都不能直接应用于预报工程结构损伤行为、给出其损伤萌生的门槛值、确定其剩余刚度和强度,故实际工程结构损伤容限设计和分析,还主要籍助于试验,本届大会在冲击专题方面有新意的工作是 P. V. Stragnicky 等人采用理论和试验方法研究了 T800H/3900-2 复合材料抗冲击能力,认为目前工程界仅研究冲击力峰值和损伤面积间的关系是不够的,必须进一步研究基体材料强度、层间断裂韧性、层板子层铺设角、脱层界面数、冲击力峰值与该层板抗冲击损伤阻力之间的关系,才能全面了解层板损伤机理。F. Collombet 等人采用三维有限元分析方法理论预报了 GL/EP 复合材料在冲击荷载作用下三维损伤特征,认为在航海复合材料结构中采用冲击安全系数为 10 是过于保守的。P. Montemurro 等人采用了修正 Hertz 定律为基础的接触模型,研究了层合复合材料被冲击的全过程。K. Williams 认为目前研究低能量冲击损伤时仅局限于研究脱层损伤是不足的,由于层合复合材料冲击损伤行为十分复杂,故建议应采用连续介质损伤力学理论为基础的损伤模型来描述和模拟冲击损伤过程中材料刚度和强度退化特征,通过超声波试验结果与其数值分析结果比较,证明了该损伤模型的正确性。I. Kimpara 提出了一种以实验为基础的半经验冲击损伤模型,此模型的特点是通过超声检测冲击损伤几何特征和含损伤层板的振动试验与理论分析结果比较,将含损伤层板折算为损伤区板厚减小的无损层板,然后采用

(下转第 116 页)