第13卷 第2期 复 合 材 料 学 报 Vol. 13 No. 2
1996年 5月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA May 1996

纤维增强复合材料横向弹性常数

王人杰
（上海交通大学工程力学系，上海 200030）

摘 要 本文提出了一个计算单向纤维增强复合材料横向弹性模量和泊松系数的边界元计算模型。泊松系数 ν_{12}、ν_{32}、ν_{13}和 ν_{23}的计算结果与实验结果吻合得很好。碳纤维增强复合材料横向模量 E_2 和 E_3 的计算值也和实验结果完全吻合，而玻璃纤维/环氧横向模量 E_2、E_3 的计算值却比实测值偏小约10%～25%。予计这是由于本文计算模型未考虑界面层的性能，它对材料的宏观性能产生了较明显的影响。

关键词 横向弹性模量，泊松系数，边界元法

纤维增强复合材料的宏观力学性能是大量纤维和基体复合后整体显现的表观平均的综合特性。由于纤维和基体的力学性能相差很大，加之纤维的形状和分布的随机性、以及界面的影响等因素，复合材料在横向受载时细观的应力和应变分布状态非常复杂，而这又直接影响到复合材料的宏观力学性能。曾提出过多个模型分别采用材料力学和弹性力学的方法建立了复合材料横向弹性常数的各种估算公式。这些公式的计算结果相互之间差别很大。与实验结果的吻合程度也各有好坏。国内外也有一些学者采用有限元法或边界元法（例如文献[2,6]）求得复合材料横向弹性常数的数值解。他们的计算结果，或者缺乏实验结果与之验证，或者由于计算工作量大，只计算了某些特殊情况。

本文采用外方内圆模型，根据复合材料薄板受力变形的特点来建立边界条件，采用边界元法求得了复合材料横向弹性模量和泊松系数随纤维体积含量 V_f 的变化曲线。计算中纤维和基体的性能数据取用国内学者有关实验中的数据，使数值计算结果和实测结果更具可比性，从而使两者相互得到验证。

1 计算模型及边界条件

工程上的纤维增强复合材料构件常呈薄板（平板或曲板）形式。在垂直纤维纵向（即1-方向）的横截面上，假设纤维呈正方形阵列（如图1所示）。代表性体积单元如图2（沿纤维纵向取单位长度）。利用对称性，只需要对外边界 AB、BC 和公共边界 DE 进行边界元离散化并求解。

当沿板的宽度2-方向承受拉应力时，由于与邻近单元的变形协调和对称性，在 BC 边界沿 x_2 方向应有等位移，即 $u_2(1,x_3)=\text{const}$，并且有 $\tau_{23}(1,x_3)=0$。此时，在薄板的厚度3-方向，沿 AB 边界有 $\sigma_3(x_2,1)=0$，$\tau_{23}(x_2,1)=0$。由此得到的应力和应变分布状态对应于测量该复合材料弹性模量 E_2 的情况。当沿板的厚度3-方向承受均布应力 σ_3 作用时，在 BC 边界上同样应有

本文于1994年12月12日收到修改稿，1994年6月20日收到初稿。国家自然科学基金资助项目

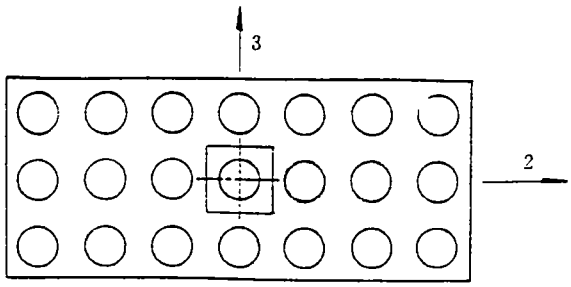

图 1　纤维增强复合材料横截面

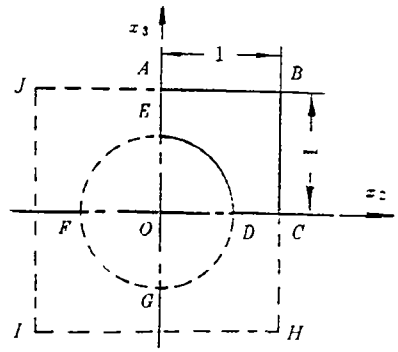

图 2　代表性计算单元

等位移 $u_2(1,x_3)=C_2$,以及 $\tau_{23}(1,x_3)=0$。并且,沿该边界分布的正应力 $\sigma_2(1,x_3)$ 还应满足沿 2-方向合力等于零的条件。而这对应于测量该复合材料弹性模量 E_3 的情况。为此,共计算了两种边值情况。

第一种边值情况,图 3 中计算单元的边界条件为

$$BC\text{ 边界}:u_2=C_2=1,\ \tau_{23}=0 \qquad AB\text{ 边界}:\sigma_3=0,\ \tau_{23}=0 \tag{1}$$

由此求得 BC 边界正应力 $\sigma_2(1,x_3)$ 和 AB 边界的法向位移 $u_3(x_2,1)$ 的分布,从而可以求得材料的 E_2 和 ν_{32} 值

$$E_2=\frac{1}{\varepsilon_2}\int_{BC}\sigma_2(1,x_3)\mathrm{d}x_3 \quad , \quad \nu_{32}=\frac{-1}{\varepsilon_2}\int_{AB}u_3(x_2,1)\mathrm{d}x_2 \tag{2}$$

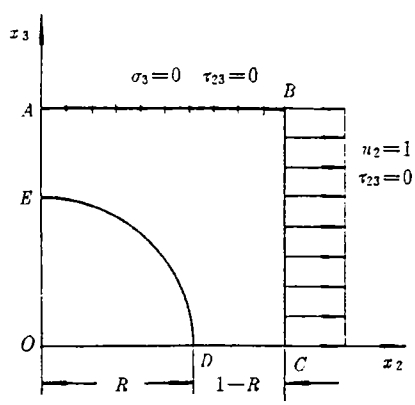

图 3　第一种边值情况

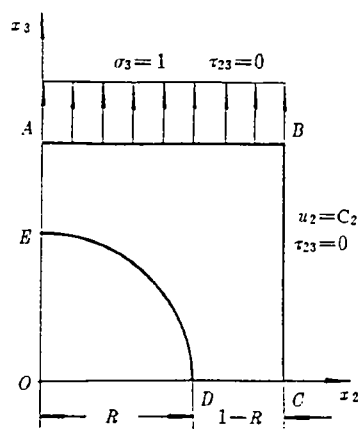

图 4　第二种边值情况

第二种边值情况,图 4 中计算单元的边界条件为

$$AB\text{ 边界}:\sigma_3=1,\ \tau_{23}=0 \quad , \quad BC\text{ 边界}:u_2=C_2,\tau_{23}=0 \tag{3}$$

同时,沿 BC 边界还应有 $\int_{BC}\sigma_2(1,x_3)\mathrm{d}x_3=0$。由此可求得沿 AB 边界的法向位移 $u_3(x_2,1)$ 的分布,进而可求得材料的 E_3 和 ν_{23} 值

$$E_3=1/\int_{AB}u_3(x_2,1)\mathrm{d}x_2 \quad , \quad \nu_{23}=-\int_{AB}u_3(x_2,1)\mathrm{d}x_2 \tag{4}$$

以上建立的计算模型,区域 $ABCDEA$ 是基体材料,区域 $EDOE$ 为纤维材料。在两者的公共边界 DE 上,还应满足应力平衡和位移连续条件

$$p_l^{\mathrm{f}}=-p_l^{\mathrm{m}} \quad , \quad u_l^{\mathrm{f}}=u_l^{\mathrm{m}} \qquad (l=2,3) \tag{5}$$

式中上标:f 表示纤维,m 表示基体。

另外，在图3和图4两种边值情况中，沿纤维纵向(1-方向)还应满足合力为零的条件，即

$$\iint_{A}\sigma_1 \mathrm{d}A = \iint_{A_f}\sigma_{f1}\mathrm{d}A + \iint_{A_m}\sigma_{m1}\mathrm{d}A = 0 \tag{6}$$

式中：A——$ABCOA$ 包围的面积；A_f——纤维部份的横截面积；A_m——基体部份的截面积。

又由该代表性体积单元与沿1-方向相邻体积单元的变形协调和对称性，该单元沿1-方向应有 $\varepsilon_f=\varepsilon_m=\varepsilon_1=\text{const}$。即沿1-方向，单元体既不是处于平面应变状态，也不是平面应力状态。文献[2]引入一等效平面应变状态$(\varepsilon'_2,\varepsilon'_3,\gamma'_{23})$，它与实际应变场$(\varepsilon_2,\varepsilon_3,\gamma_{23})$之间满足以下转换关系，对于纤维部份有

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon'_2 &= \varepsilon_2 + \nu_{f21}\varepsilon_1 = \sigma_2(1-\nu_f)^2/E_f - \sigma_3\nu_f(1+\nu_f)/E_f \\
\varepsilon'_3 &= \varepsilon_3 + \nu_{f21}\varepsilon_1 = -\sigma_2\nu_f(1+\nu_f)/E_f + \sigma_3(1-\nu_f^2)/E_f \\
\gamma'_{23} &= \tau_{23}/G_f = \gamma_{23}
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

以及

$$u'^f_2 = u_2 + \nu_{f21}\varepsilon_1 x_2 \quad , \quad u'^f_3 = u_3 + \nu_{f21}\varepsilon_1 x_3 \tag{8}$$

式(7)中，纤维的横向等效模量

$$E_f = (1+\nu_{f23})^{-2}(1+2\nu_{f23}+\nu_{f21}\nu_{f12})E_{f2} \quad , \quad \nu_f = (\nu_{f23}+\nu_{f21}\nu_{f12})/(1+\nu_{f23})$$

并有 $G_f = E_f/2(1+\nu_f) = E_{f2}/2(1+\nu_{f23}) = G_{f23}$，类似地，对于基体部分亦有

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon'_2 &= \varepsilon_2 + \nu_m\varepsilon_1 = \sigma_2(1-\nu_m^2)/E_m - \sigma_3\nu_m(1+\nu_m)/E_m \\
\varepsilon'_3 &= \varepsilon_3 + \nu_m\varepsilon_1 = -\sigma_2\nu_m(1+\nu_m)/E_m + \sigma_3(1-\nu_m^2)/E_m \\
\gamma'_{23} &= \tau_{23}/G_m = \gamma_{23}
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

以及

$$u'^m_2 = u_2 + \nu_m\varepsilon_1 x_2 \quad , \quad u'^m_3 = u_3 + \nu_m\varepsilon_1 x_3 \tag{10}$$

式(7)、(8)、(9)、(10)中的 ε_1 可通过式(6)来确定。由文献[2]有

$$\sigma_{f1} = \nu_{f21}(\sigma_2+\sigma_3) + E_{f1}\varepsilon_1 \quad , \quad \sigma_{m1} = \nu_m(\sigma_2+\sigma_3) + E_m\varepsilon_1 \tag{11}$$

将式(11)代入式(6)，并由式(7)和式(9)可得

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1(E_{f1}V_f + E_mV_m) + \nu_m[E_m/(1-\nu_m-2\nu_m^2)]\oint_{\Gamma_1+\Gamma_2}(u'_2n_2+u'_3n_3)\mathrm{d}s \\
&+ \nu_{f21}[E_f/(1-\nu_f-2\nu_f^2)]\oint_{-\Gamma_2}(u'_2n_2+u'_3n_3)\mathrm{d}s = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

式中边界：$\Gamma_1=AB+BC+CH+HI+IJ+JA$，$\Gamma_2=DE\text{FGD}$。上述等效平面应变状态$(\varepsilon'_2,\varepsilon'_3,\gamma_{23})$可方便地采用二维边界元法来求数值解。只要根据式(8)和式(10)对前面提出的两种边值情况的边界条件(1)式和(3)式，以及公共边界的连续条件(5)式稍作必要的修正即可。

2 边界积分方程和边界元

在所选的计算区域 $ABCOA$ 内，基体闭区间 $ABCDEA$ 上任意一点 P 处的位移分量 $u_l(P)$ 可以由边界上的表面力分量 $p_k(Q)$ 和位移分量 $u_k(Q)$ 沿边界的积分求得。当 P 点取在边界上时，得到的边界积分方程为[3]

$$C_{lk}u_k(P) = \int_{\Gamma_1+\Gamma_2}[u^m_{lk}(P,Q)p_k(Q) - u_k(Q)p^m_{lk}(P,Q)]\mathrm{d}\Gamma(Q) \qquad (l,k=2,3) \tag{13}$$

同样，对纤维所在区域也有边界积分方程

$$C_{lk}u_k(P) = \int_{-\Gamma_2}[u^f_{lk}(P,Q)p_k(Q) - u_k(Q)p^f_{lk}(P,Q)]\mathrm{d}\Gamma(Q) \qquad (l,k=2,3) \tag{14}$$

式(13)、(14)中，平面应变状态的基本解及其对应的表面力的表达式分别为

$$\left.\begin{aligned} u^i_{lk}(P,Q) &= \frac{1}{8\pi G_i(1-\nu_i)}\left[(3-4\nu_i)\ln\frac{1}{r}\delta_{lk}+r_{,l}r_{,k}\right] \\ p^i_{lk}(P,Q) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu_i)r}\left\{\frac{\partial r}{\partial n}\left[(1-2\nu_i)\delta_{lk}+2r_{,l}r_{,k}\right]-(1-2\nu_i)(r_{,l}n_k-r_{,k}n_l)\right\} \\ & (l,k=2,3 \qquad i=\mathrm{f,m}) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

式中：r——P 点和 Q 点之间的距离；　n——边界的外法线；　$\delta_{lk}=\begin{cases}1,\text{当 } l=k\\0,\text{当 } l\neq k\end{cases}$

为了求解边界积分方程(13)和(14)式，将边界离散化，从而得到包含边界上各节点位移分量和边界力分量的一组线性代数方程 $[H]\{u\}=[G]\{p\}$。本文采用二次单元，计算中 AB 和 BC 边界分别采用5个单元，而公共边界 DE 采用7个单元，总共24个单元，52个节点。为了判断数值计算的收敛性，还对 AB 和 BC 边界分别采用7个单元(总共60个节点)进行了计算。

3　数值计算结果及讨论

本文对三种典型的纤维增强复合材料进行了计算，纤维和基体的性能列于表1(为便于与实验结果进行比较，该表所列玻璃纤维、碳纤维和环氧基体的性能数据取自文献[4,5])。计算

表1　纤维和基体的性能

	E_{f1}(GPa)	E_{f2}(GPa)	ν_{f23}	ν_{f21}	E_m(GPa)	ν_m
玻璃/环氧	89.4	89.4	0.242	0.242	3.31	0.369
碳/环氧	194.1	17.77	0.346	0.325	3.31	0.369
碳/铝	194.1	17.77	0.346	0.325	71.0	0.33

得到了复合材料横向弹性常数 E_2、ν_{12}、ν_{32}和 E_3、ν_{13}、ν_{23}值随纤维体积含量 V_f 的变化规律，分别绘于图5～10。相应的计算值列于表2～4。在表2～4中还列有根据混合律 $E_1=E_{f1}V_f+E_mV_m$求得的 E_1值和根据对称条件 $\nu_{ij}/E_j=\nu_{ji}/E_i$ 换算得到的 ν_{21}、ν_{31}值，后两者也都分别绘于图6、图8和图10中。在表5中，由52节中和60节点计算结果比较可见，数值计算结果已收敛。

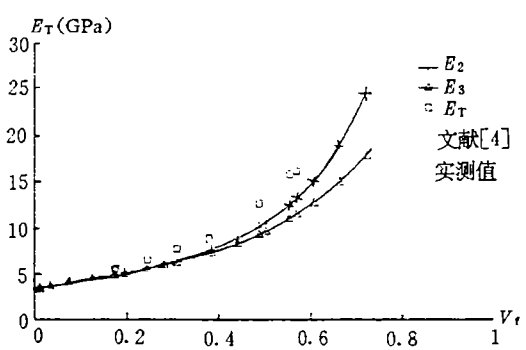

图5　玻璃纤维/环氧横向弹性模量随 V_f 变化曲线

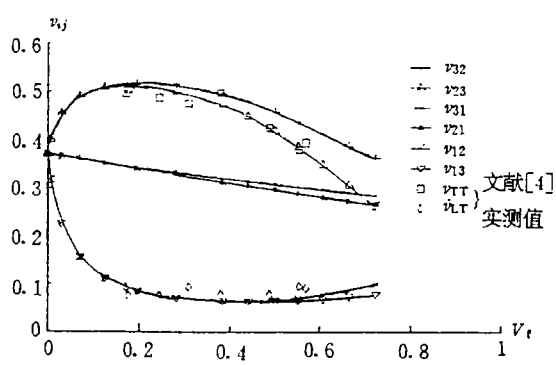

图6　玻璃纤维/环氧泊松系数随 V_f 变化曲线

由计算结果可见，即便是纤维正方形阵列，沿薄板的宽度和厚度方向的宏观模量 E_2和 E_3

以及 ν_{32}和 ν_{23}的值也有所不同。ν_{32}和 ν_{23}的值明显大于 ν_f，甚至大于 ν_m 的值。与此现象相伴的是 ν_{12}和 ν_{13}的值几乎在计算所取 V_f 值的整个范围内不仅小于 ν_m，甚至比 ν_f 还小很多。这表明当复

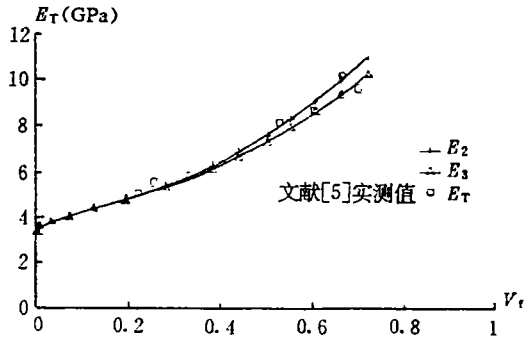

图7 碳纤维/环氧横向弹性模量随 V_f 变化曲线

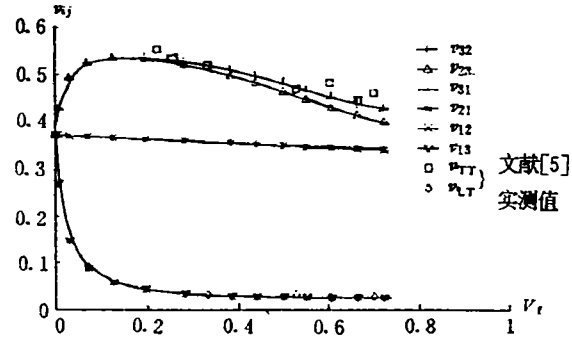

图8 碳纤维/环氧泊松系数随 V_f 变化曲线

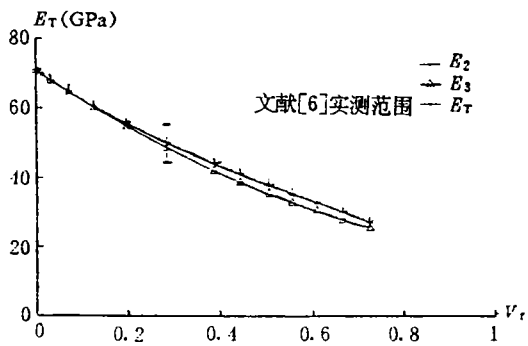

图9 碳纤维/铝横向弹性模量随 V_f 变化曲线

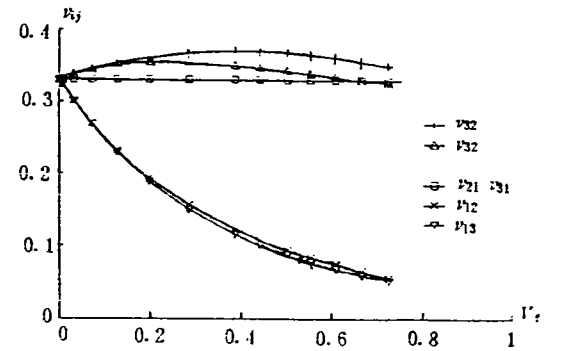

图10 碳纤维/铝泊松系数随 V_f 变化曲线

表2 玻璃纤维/环氧的弹性常数

R	V_f	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	E_3 (GPa)	ν_{12}	ν_{32}	ν_{21}	ν_{13}	ν_{23}	ν_{31}
0.1	0.008	3.99	3.42	3.42	0.316	0.399	0.369	0.316	0.399	0.369
0.2	0.031	6.01	3.68	3.68	0.223	0.452	0.365	0.223	0.451	0.365
0.3	0.071	9.40	4.02	4.01	0.1535	0.489	0.359	0.1535	0.488	0.359
0.4	0.126	14.13	4.46	4.44	0.1105	0.508	0.350	0.1104	0.506	0.351
0.5	0.196	20.2	5.08	5.01	0.0852	0.515	0.339	0.0848	0.509	0.342
0.6	0.283	27.7	6.02	5.86	0.0709	0.511	0.326	0.0702	0.498	0.331
0.7	0.385	36.4	7.58	7.22	0.0647	0.492	0.311	0.0632	0.469	0.319
0.75	0.442	41.3	8.79	8.22	0.0644	0.476	0.303	0.0621	0.445	0.313
0.8	0.503	46.6	10.48	9.54	0.0662	0.454	0.294	0.0626	0.414	0.306
0.84	0.554	51.0	12.36	10.92	0.0695	0.433	0.287	0.0642	0.383	0.300
0.88	0.608	55.7	14.99	12.67	0.0753	0.409	0.280	0.0670	0.346	0.295
0.92	0.665	60.5	18.84	14.91	0.0845	0.384	0.272	0.0712	0.304	0.289
0.96	0.724	65.6	24.54	17.73	0.0988	0.360	0.264	0.0765	0.261	0.283

表3 碳纤维/环氧的弹性常数

R	V_f	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	E_3 (GPa)	ν_{12}	ν_{32}	ν_{21}	ν_{13}	ν_{23}	ν_{31}
0.1	0.008	4.8	3.48	3.48	0.268	0.427	0.370	0.268	0.427	0.370
0.2	0.031	9.3	3.75	3.75	0.1485	0.494	0.368	0.1484	0.494	0.368
0.3	0.071	16.8	4.01	4.01	0.0876	0.525	0.366	0.0875	0.524	0.367
0.4	0.126	27.3	4.33	4.32	0.0577	0.535	0.364	0.0576	0.533	0.364
0.5	0.196	40.8	4.75	4.72	0.0419	0.534	0.360	0.0417	0.531	0.361
0.6	0.283	57.3	5.34	5.27	0.0332	0.525	0.356	0.0329	0.518	0.357
0.7	0.385	76.7	6.21	6.07	0.0284	0.506	0.351	0.0279	0.495	0.353
0.75	0.442	87.6	6.79	6.60	0.0270	0.493	0.348	0.0264	0.479	0.351
0.8	0.503	99.2	7.52	7.25	0.0262	0.477	0.345	0.0254	0.460	0.348
0.84	0.554	109.0	8.22	7.86	0.0258	0.463	0.343	0.0249	0.443	0.346
0.88	0.608	119.3	9.03	8.55	0.0257	0.449	0.340	0.0247	0.426	0.344
0.92	0.665	130.1	9.96	9.34	0.0259	0.436	0.338	0.0245	0.409	0.342
0.96	0.724	141.4	10.98	10.20	0.0261	0.424	0.336	0.0245	0.394	0.340

表4　碳纤维/铝的弹性常数

R	V_f	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	E_3 (GPa)	ν_{12}	ν_{32}	ν_{21}	ν_{13}	ν_{23}	ν_{31}
0.1	0.008	72.0	70.2	70.2	0.323	0.331	0.331	0.323	0.331	0.331
0.2	0.031	74.9	68.2	68.2	0.301	0.337	0.331	0.301	0.337	0.331
0.3	0.071	79.7	65.0	64.8	0.270	0.345	0.331	0.269	0.344	0.331
0.4	0.126	86.5	60.7	60.2	0.232	0.354	0.331	0.230	0.351	0.331
0.5	0.196	95.2	55.6	54.6	0.1933	0.361	0.331	0.1899	0.355	0.331
0.6	0.283	105.8	50.1	48.4	0.1564	0.367	0.331	0.1513	0.355	0.331
0.7	0.385	118.4	44.1	41.8	0.1232	0.370	0.331	0.1168	0.350	0.331
0.75	0.442	125.4	41.0	38.5	0.1082	0.369	0.331	0.1015	0.346	0.330
0.8	0.503	132.9	37.9	35.3	0.0943	0.368	0.330	0.0877	0.342	0.330
0.84	0.554	139.2	35.4	32.7	0.0839	0.365	0.330	0.0777	0.338	0.330
0.88	0.608	145.9	32.8	30.3	0.0742	0.361	0.330	0.0685	0.333	0.330
0.92	0.665	152.8	30.1	27.9	0.0650	0.355	0.330	0.0602	0.329	0.330
0.96	0.724	160.1	27.2	25.4	0.0558	0.350	0.329	0.0523	0.326	0.330

表5　玻璃纤维/环氧不同离散节点数时的计算结果比较

V_f	节点数	E_2(GPa)	E_3(GPa)	ν_{12}	ν_{32}	ν_{13}	ν_{23}
0.385	52	7.58	7.22	0.0647	0.492	0.0632	0.469
	60	7.59	7.22	0.0647	0.492	0.0632	0.469
0.503	52	10.48	9.54	0.0662	0.454	0.0626	0.414
	60	10.48	9.55	0.0662	0.455	0.0626	0.414

合材料横向受拉时,纵向(1-方向)由于受纤维的约束。只发生极小的收缩变形,以致侧向收缩

变形主要集中在横向平面内。这种现象属于纤维和基体复合后的"协同效应"。而 ν_{21} 和 ν_{31} 随 V_f 的变化规律与混合律的偏差很小。

在图5～8中，还标有文献[4,5]的实测结果。由图可见，玻璃纤维/环氧和碳纤维/环氧两种材料的泊松系数随 V_f 变化规律的计算结果与实测结果吻合得相当好。至于横向弹性模量，对碳纤维/环氧，计算结果与实验结果完全吻合；在文献[6]的工作中，测得 $V_f \cong 0.283$ 时碳纤维/铝的横向弹性模量在44.2～55.1GPa 的范围内，本文计算结果正好落在上述范围的中央；而对玻璃纤维/环氧，计算结果与实验结果的变化趋势是一致的，唯计算值一致地比实测值偏小，从 $V_f \cong 0.174$ 处偏小约10%，增加到 $V_f \cong 0.555$ 处偏小约25%。有关的研究表明，在复合材料纤维和基体之间存在的界面层，其力学性质，既不同于基体，也有别于纤维，并且界面层的性能对复合材料的宏观力学性能是有影响的。预计上述偏差是由于本文的计算模型中未考虑界面层的影响所致。

参 考 文 献

1 王震鸣. 复合材料力学和复合材料结构力学. 北京：机械工业版社，1991. 69～76

2 Yin W L, Fei Z Z. Boundary-element analysis of micromechanical models for computing the elastic moduli of a unidirectional composite. In: Sun C T, Loo T T, eds. Proc of the 2nd International Symposium on Composite Materials and Structures. Beijing: Peking University Press, 1992. 382～387

3 王元淳. 边界元法基础，上海交通大学出版社，1988. 114～118

4 朱晓光 等. 用浸液超声法测量单向复合材料的弹性常数. 复合材料学报，1987, 4(2): 70～76

5 Zhu X G, *et al*. Elastic moduli of unidirectional carbon fiber composites, In: Loo T T, Sun C T, eds. Proc of International Symposium on Composite Materials and Structures. Beijing: Technomic Publishing Company, Inc. 1986. 135～140

6 金城 等. 工艺参数和材料组分对碳/铝复合材料力学性能的影响. 航空学报(工程版)，1986，试刊(4)：99～103

TRANSVERSE ELASTIC CONSTANTS FOR FIBER REINFORCED COMPOSITE MATERIALS

Wang Renjie

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030)

Abstract This paper proposes a BEM computation model to calculate the transverse effective moduli and Poisson's ratios of unidirectional fiber reinforced composites. The computation results of ν_{12}, ν_{32}, ν_{13} and ν_{23} are in good agreement with the experimental results. The E_2, E_3 for carbon-fiber reinforced composites coincide with the experimental results excellently. However, for glass-fiber reinforced epoxy composite, the computation results of E_2, E_3 are about 10～25 percent lower . For the latter, it is guessed that there may exist remarkable interlayer effect, which was not considered in the computation process.

Key words transverse modulus, Poisson's ratio, BEM