第 14 卷 第 2 期 复 合 材 料 学 报 Vol. 14 No. 2
1997 年 5 月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA May 1997

各向异性层合板弯曲刚度系数的反演分析

王晓纯 沈新普* 徐秉业*
(北方工业大学建筑学院, 北京 100041) (* 清华大学工程力学系, 北京 100081)

摘 要 本文提出了通过测量位移来获取复合材料正交异性板的弯曲刚度系数的反演方法。给出了最小二乘法的迭代格式。详细讨论了不同的反分析模型对数值结果的影响以及数值解的收敛性及灵敏度系数计算等问题。应用实例表明, 本文的方法是实用的、有效的。

关键词 复合材料, 弯曲刚度, 反演分析, 最小二乘法
中图分类号 O241. 2

用有限元法求解固体力学问题时, 最终归结为求解大型线性代数方程组 $\{F\} = [K]\{u\}$ 。其中 $[K]$ 与材料性质、离散方式以及位移模式有关。对于金属材料, 由于各向同性的原因, 材料性质以及材料参数的实验是比较容易的。对于复合材料, 问题要相对复杂一些。因为复合材料的各种参数不仅与各组分材料有关, 而且与加工方式有关。对于一个完整的复合材料层合板, 由于不能准确测量其铺层方式、材料间的粘合程度以及各层材料的性质, 因此, 也就无法计算与各层材料性质有关的各种参数, 必须采用能够直接测试复合材料整体性质的方法[1,2]。已有的一些方法只能解决单层板或者近似作为单层板的测试问题, 应用范围受限制。这样, 如何直接测试层合板的各种物性参数方法的研究, 一直受到人们的重视。

基于上述原因, 本文根据系统辨识原理[7], 针对复合材料层合板弯曲刚度系数的测试问题, 提出用最小二乘递推公式反演弯曲刚度系数的方法, 给出了较为优化的反演模型, 讨论了灵敏度系数的计算以及测点位置的选择对反演计算中收敛速度的影响等问题。几种典型算例的结果表明, 文中提出的反演分析方法, 对解决复合材料层合板弯曲刚度系数的测试问题是行之有效的。

1 反演材料参数的最小二乘递推公式

这里我们采用控制边界位移误差的方法反演材料参数[3]。首先设定, 针对一个具体计算模型, 如果给出材料参数的初植之后, 可以进行有限元的正分析计算, 同时, 可以准确测量该计算模型上若干个点的位移。

变量 $\{x\}^k$ 是第 k 次递推计算时的材料参数向量; $\{u\}^k$ 是与 $\{x\}^k$ 相对应, 由有限元的正分析计算出的位移向量; 设 $\{\bar{u}\}$ 是位移的测量值。反演计算的目标是不断改变材料参数 $\{x\}^k$, 使位移的计算值 $\{u\}^k$ 与位移测量值 $\{\bar{u}\}$ 的差值的平方和为最小, 数学表达式为

本文于 1996 年 3 月 26 日收到修改稿, 1996 年 1 月 4 日收到初稿

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://ww

$$J = \sum_{i=1}^{m} (\bar{u}_i - u_i^k)^2 \leq \epsilon \tag{1}$$

为了建立材料参数 $\{u\}^k$ 与 $\{x\}^{k-1}$ 之间的递推公式, 将 $u(\{x\})$ 在 $\{u\}^k$ 邻域内按 Taylor 级数展开[5], 略去二阶以上小量则有

$$\{u\}^k = \{u\}^{k-1} + \frac{\partial\{u\}^{k-1}}{\partial\{x\}^{k-1}}(\{x\}^k - \{x\}^{k-1}) \tag{2}$$

令

$$\frac{\partial\{u\}^{k-1}}{\partial\{x\}^{k-1}} = [Z]_{m\times n}$$

则有

$$\{u\}^k = \{u\}^{k-1} + [Z](\{x\}^k - \{x\}^{k-1}) \tag{3}$$

式中 m 是位移观测量的个数, n 为反演材料参数的个数。当 $m > n$ 时, 系数矩阵 $[Z]$ 一般是列满秩的, 方程(3) 可以得到唯一解。这是个隐性递推公式, 而且没有考虑加速收敛问题。因此, 引入最小二乘法, 使每次递推计算产生的目标函数最小。由目标函数的极小化条件

$$\frac{\partial J}{\partial\{x\}^k} = 0 \tag{4}$$

解得

$$\{x\}^k = \{x\}^{k-1} + ([Z]^{\mathrm{T}}[Z])^{-1}[Z]^{\mathrm{T}}(\{\bar{u}\} - \{u\}^{k-1}) \tag{5}$$

方程(5) 中的 $[Z]$ 是一个重要的系数矩阵。由方程(2) 可知, 元素 Z_{ij} 的物理意义为, 第 j 个未知材料参数 x_j 的变化引起的第 i 处位移测点计算值 u_i 的变化。将该系数定义为灵敏度系数[6]。如果能够建立位移与材料参数的解析函数关系, 可以解析求得 Z_{ij} 的值, 但在一般情况下, 这种解析表达式是很难求得的, 只能借助数值计算的方法求解 Z_{ij} 。最常用的办法是用差分代替导数来计算灵敏度系数矩阵中的各元素。即

$$Z_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\Delta u_i(\Delta x_j)}{\Delta x_j} \tag{6}$$

式中 Δx_j 表示未知量 x_j 的一个微小变化。用 δ_j 表示一个小的正数, 则 $\Delta x_j = \delta_j \quad x_j$; $\Delta u_i(\Delta x_j)$ 表示用有限元正分析计算得到的, 相应于 Δx_j 的第 i 个观测点位移计算值的变化量。$\Delta u_i(\Delta x_j)$ 可以通过两次有限元正分析计算得到的位移值的差求得:

$$\Delta u_i(\Delta x_j) = u_i(x_j + \Delta x_j) - u_i(x_j) \tag{7}$$

于是当给出差分步长 $\{\delta\}$ 后, 在每一步的迭代计算中由有限元正分析可以计算出 Z_{ij}。除第一次迭代计算外, 每次迭代过程中形成灵敏度系数矩阵 $[Z]_{m\times n}$ 需要进行 n 次有限元的正分析计算。

对于小变形问题, 在数量上位移差值 Δu_i 比材料参数增量 Δx_j 小很多, 为了减小计算中的舍入误差, 每次迭代计算中用一个给定的参数去除 $\{x\}^k$ 使其无量纲化。因此, 灵敏度系数 $\partial u_i/\partial x_j$ 的量纲与挠度的量纲相同。

根据上面给出的算法, 反演材料参数的具体计算步骤如下: ①给出材料参数的初值 $\{x\}^0$、位移测量值 $\{\bar{u}\}$ 和差分步长 $\{\delta\}$; ②由有限元的正分析计算出 $\{x\}^{k-1}$ 处的灵敏度系数矩阵 $[Z]$; ③由方程(5) 计算出 $\{x\}^k$; ④检查收敛性, 如目标函数小于允许误差, 则 $\{x\}^k$ 即为所求材料参数的近似值, 否则把 $\{x\}^k$ 作为初值, 返回到②继续计算。

2　计算条件对收敛性的影响

对于一个完备的数学问题, 需要具备三个条件, 即①解是存在的; ②解是唯一的; ③解是稳定的。在反演分析中, 完备性的前二条是比较容易满足的。比较难处理的是解的稳定性问题。反映到计算公式中去, 就是灵敏度系数矩阵 $[Z]$ 和方程(5) 中的 $([Z]^{\mathrm{T}}[Z])^{-1}$ 的性态如何。如果

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www

灵敏度系数矩阵的性态不够好, 会使 $([Z]^{T}[Z])^{-1}$ 成为一个病态矩阵, 此时, 递推计算会不收敛或者收敛速度很慢。因此, 反演分析中的一个很重要问题是如何防止和解决数值不稳定问题。数学上, 解决数值不稳定的方法很多[4], 但每一种方法都有其很强的针对性, 而且大部分方法都需要引进新的变量。例如正则化方法可以解决某些问题的不适定性问题, 但正则化方程中的系数需要依靠计算经验人为地进行选择。最好的方法是防止灵敏度系数出现病态。在反演材料参数的问题中, 影响灵敏度系数矩阵性态的因素有三个, ①计算模型; ②测量点位置及位移向量; ③差分步长。

在面外载荷作用下, 对于正交各向异性板, 每个有限元板单元节点位移有3个, 即挠度 w 和两个转角 θ_x、θ_y。与挠度 w 相比两个转角的量级比较小, 而且测量转角要比测量挠度难度大。因此, 在以后的反演分析中每个测量点, 只取挠度 w 为测量点位移, 即

$$\{\bar{u}\} = \{w\} \tag{8}$$

根据系统辨识原理, 选择计算模型的原则是, 当给这个模型一个激励后, 各种响应应该能够最大限度地反映出来。当反演材料参数时, 材料参数的改变就是激励, 响应是测量点的位移。我们设计了悬臂板、二点支承板和三点支承板反演计算模型, 从灵敏度系数的均匀分布以及实验的简便易行角度考虑, 图1给出的三点支承矩形板反演计算模型是比较理想的。图中载荷作用点的坐标 $X = 120\text{mm}$, $Y = 150\text{mm}$。图2是反演各向同性板弯曲刚度系数 d_{11} 时, 图1模型上灵敏度系数的绝对值的分布情况。有关数据如表1所示。由此可以看出, 三点支承反演计算模型对弯曲刚度系数的变化比较敏感, 而且各点的灵敏度系数差值比较小, 这对改善矩阵 $([Z]^{T}[Z])^{-1}$ 的性质起到关键作用。

表1 反演弯曲刚度系数 d_{11} 时的灵敏度系数[mm]

坐标										
	X	0.0	150.0	300.0	0.0	120.0	300.0	0.0	150.0	300.0
	Y	0.0	0.0	0.0	150.0	150.0	150.0	300.0	300.0	300.0
Z_{ij}		0.1733	−0.2364	0.1059	0.2357	−0.1411	0.1674	0.1734	−0.2364	0.106

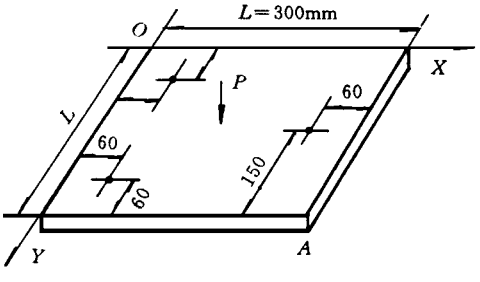

图1 三点支承板反演计算模型

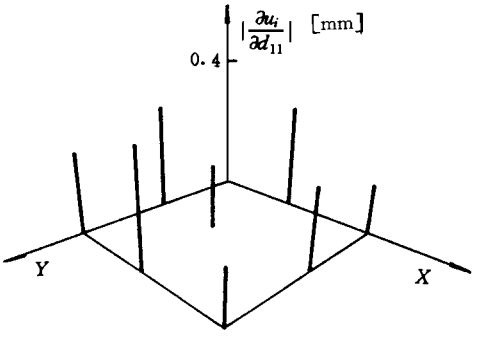

图2 反演 d_{11} 时灵敏度系数的绝对值分布情况

方程(6)中用差分近似计算偏导数, 需要人为给出差分步长。差分步长的选择对灵敏度系数的影响很大, 差分步长过大和过小都可能导致递推计算收敛性过慢或者不收敛。图3是反演各向同性材料弯曲刚度系数 d_{12} 时, 图1中 A 点灵敏度系数的变化情况, 当差分步长 $\delta = 0.001$ 时灵敏度系数跳动得比较大。当差分步长 $\delta = 0.01$ 时, 灵敏度系数变化很小。图4是两种差分步

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www

长情况下, 反演 d_{12}的收敛情况, 当 $\delta = 0.001$时, 递推计算10次以后才收敛, 当 $\delta = 0.01$时, 3次就开始收敛。从图3和图4的对照可以看出, 灵敏度系数的平稳程度与收敛的平稳程度直接对应。如果在第1次迭代中形成的 $([Z]^{T}[Z])$ 是一个病态矩阵, 则由方程(5) 得到的 $\{x\}^{1}$ 将失真, 进而由 $\{x\}^{1}$ 计算出的第2次迭代中的 Z_{ij} 也失真。也就是灵敏度系数不稳定的原因是由于前一次迭代中系数矩阵 $[Z]$ 和 $([Z]^{T}[Z])$ 的性态不好造成的。在数值计算中, 影响系数矩阵性态的因素很多, 同时又很难在数量上给出定量的分析。例如, 在有限元的正分析计算中, 单元尺寸大小急剧变化、细长单元以及相邻单元材料性质急剧变化等都会造成系数矩阵性态不好。目前主要靠计算经验解决这些问题。因此, 最佳差分步长的选取也是一个建立在经验基础上的优化问题。最佳差分步长的选取原则是既能使灵敏度系数的值不被各种误差淹没, 又能较正确地反映该点的目标函数下降方向。

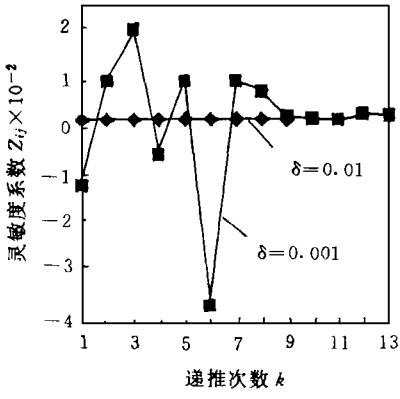

图3　差分步长对灵敏度系数的影响

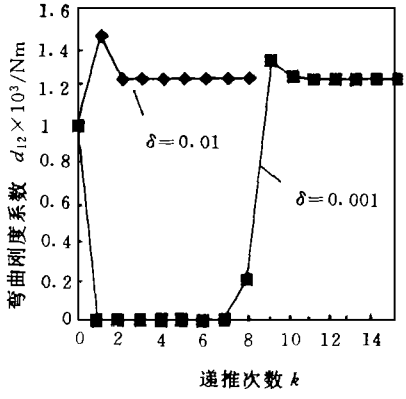

图4　差分步长对收敛速度的影响

3　反演计算结果

为了实现上述算法, 本文用 FORTRAN 语言编制了能够在微机上运行的各向异性层合板正分析和反演分析计算程序, 针对各向同性板; 参考坐标轴与主轴一致的正交各向异性层合板; 参考坐标轴与主轴不一致的正交各向异性层合板的弯曲刚度系数, 采用图1的计算模型进行了反演分析计算。在计算之前需要对材料参数有一个大体估计, 并给出材料参数的初值 $\{x\}^{0}$, 对于一种具体的复合材料板我们可以利用复合材料细观力学中的有效模量理论根据组分材料的性质和组成方式对材料参数做一预测, 把预测结果作为材料参数的初值[8]。下面是三种算例的计算条件和结果。

3.1　反演三个参数的算例

对于各向同性板, 如果不考虑剪切弹性模量与拉伸弹性模量的关系, 弯曲刚度系数矩阵为

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & d_{66} \end{bmatrix} \tag{9}$$

需要反演的材料参数为

$$\{x\} = [d_{11} \quad d_{12} \quad d_{66}]^{T} \tag{10}$$

反演计算条件是: 差分步长 $\delta_i = 0.1$, 测量点个数 $m = 6$, 反演计算结果如表2所示。从表中可以看出, 递推计算中, 各参数稳定, 而且收敛快。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://ww

表2 各向同性材料弯曲刚度系数反演计算结果[Nm]

d_{ij}	初值	递推次数 k						真值 x_i	$(x_i^6 - x_i)/x_i$
		1	2	3	4	5	6		
d_{11}	980	1872	3022	3930	4098	4073	4073	4072	2.5×10^{-4}
d_{12}	980	129	286	644	1083	1214	1222	1222	$<10^{-3}$
d_{66}	980	996	1344	1443	1418	1425	1425	1425	$<10^{-3}$

3.2 反演四个参数的算例

对于参考坐标轴与主轴一致的正交各向异性板,需要反演的材料参数为

$$\{x\} = [d_{11} \quad d_{12} \quad d_{22} \quad d_{66}]^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

这里我们选择的是强正交各向异性材料 $d_{11}/d_{22} = 15.4$,差分步长取 $\delta_1 = \delta_3 = \delta_4 = 0.1$, $\delta_2 = 0.05$,测量点个数 $m = 8$。表3是计算结果,从表中可以看出,收敛速度虽然比各向同性的慢些,但计算过程参数稳定,精度也比较高。

表3 正交各向异性板弯曲刚度系数反演计算结果[Nm]

d_{ij}	初值	递推次数 k							真值 x_i	误差
		1	2	3	5	7	9	11		
d_{11}	980	1646	2272	2499	2500	2498	2499	2498	2498	$<10^{-3}$
d_{12}	9.8	22.0	38.8	47.9	48.5	48.8	48.6	48.7	48.7	$<10^{-3}$
d_{22}	98	140.6	160.9	162.4	162.2	162.3	162.3	162.3	162.3	$<10^{-3}$
d_{66}	98	122.5	127.7	127.7	127.8	127.8	127.8	127.8	127.8	$<10^{-3}$

3.3 反演六个参数的算例

将算例2正交各向异性板的主轴旋转45°角,此时需要反演的弯曲刚度系数为

$$\{x\} = [d_{11} \quad d_{12} \quad d_{16} \quad d_{22} \quad d_{26} \quad d_{66}]^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

差分步长都取 $\delta = 0.02$,测量点个数 $m = 12$。表4是计算结果。递推过程中反演参数都比较平稳。收敛速度也比较快。误差均在1%以下。

表4 参考轴与主轴不一致的正交各向异性板反演计算结果[Nm]

d_{ij}	初值	递推次数 k								真值 x_i	$(x_i^8 - x_i)/x_i$
		1	2	3	4	5	6	7	8		
d_{11}	490	713	904	821	821	820	820	819	820	817	3×10^{-3}
d_{12}	294	434	599	566	565	565	565	564	564	562	4×10^{-3}
d_{16}	294	442	639	598	590	588	587	586	586	587	1×10^{-3}
d_{22}	490	636	721	804	816	819	818	818	818	817	7×10^{-4}
d_{26}	294	404	549	578	585	580	586	586	586	584	3×10^{-3}
d_{66}	294	459	668	641	644	644	644	643	644	641	5×10^{-3}

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://ww

4 结 束 语

本文提出用最小二乘法递推公式, 反演复合材料板弯曲刚度系数的方法。编制了复合材料各向异性板有限元分析和弯曲刚度系数反演分析的计算程序。分析了反演计算模型、差分步长的选择对灵敏度系数的计算以及收敛速度的影响, 文中针对各向同性板、参考轴与主轴一致的正交各向异性板、参考轴与主轴不一致的正交各向异性板的三种情况, 分别反演计算了三个、四个、六个弯曲刚度系数问题, 计算结果表明, 文中所提出的反演分析方法通用性强, 收敛速度快、稳定性好。该方法的提出, 为直接测试复合材料层合板整体弯曲刚度系数提供了一个非常有价值的途径。另外, 由于该方法只需测量试件上几个点的挠度, 即可进行反演计算, 因此, 从实验的角度考虑, 也是非常简便易行的。

参 考 文 献

1 Wang Xiaochun, Masuda Yuichro. Finite element analysis for orthotropic plate bending. Centre News, (Tokyo University) 1986, 18 (Supplement): 76～85

2 Masuda Yuichro, Wang Xiaochun. Analysis of the out¬of¬plane deflections of orthotropic circular plates and its application to bending rigidity measurement. Proc ISCMS, 1986. 955～960

3 沈新普, 岑章志, 徐秉业. 岩土工程弹塑性物性辨识问题数值求解格式. 岩土工程学报, 1995, 17 (3): 66～71

4 Shiro KUBO. Analysis schemes of inverse problems. J Soc Mat Sci, Japan 1992, 41 (470): 1595～1604

5 顺逆解析入门. 日本森北出版株式会社, 1990

6 Juhachi ODA, Makoto HATTORI. An inverse analysis technique to obtain material properties. 日本机械学会论文集, 992, 55 (552): 1376～1381

7 蔡季冰. 系统辨识. 北京: 北京理工大学出版社, 1991

8 周履, 范赋群. 复合材料力学. 北京: 高等教育出版社, 1995

INVERSE ANALYSIS OF BENDING STIFFNESS FOR ANISOTROPIC LAMINATED PLATES

Wang Xiaochun

(North China University of Technology, Beijing 100041)

Shen Xinpu　　Xu Bingye

(Dep of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100081)

Abstract　An inverse method to obtain the coefficients of bending stiffness of orthotropic composite plates by boundary displacement measurement is presented. A least square iterative scheme is given. The effect on the numerical solution caused by the changes of the model used in analysis is discussed in detail as well as the convergence of the numerical scheme and the calculation scheme of the sensitivity coefficients. The results of application show that the inverse method presented here is practical and efficient.

Key words　composite, bending stiffness, inverse analysis, least square method

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://ww