复合材料学报 Acta Materiae Compositae Sinica
第29卷 第4期 8月 2012年
Vol. 29 No. 4 August 2012

文章编号：1000-3851(2012)04-0191-04

随机短纤维增强复合材料弹性模量预测模型

任 超，陈建钧，潘红良*
（华东理工大学 机械与动力工程学院，上海 200237）

摘 要： 为了研究纤维增强复合材料的力学性能，借助混合率构造的 Reuss-Voigt 模型以及三维纤维取向简化模型，建立了随机短纤维复合材料弹性模量预测模型。利用该模型对玻璃纤维增强尼龙 6(PA6)复合材料进行弹性模量预测，其预测结果与拉伸实验结果误差值小于 5%，表明该预测模型具有较好的准确性。

关键词： 随机短纤维增强复合材料；弹性模量；预测模型；Reuss-Voigt 模型；三维纤维取向

中图分类号： TB332 **文献标志码：** A

Prediction model for elastic modulus of random short fiber reinforced composite

REN Chao, CHEN Jianjun, PAN Hongliang*
(School of Mechanical and Power Engineering, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China)

Abstract: To study the mechanical property of fiber reinforced composite, Reuss-Voigt model and 3D fiber orientation simplified model were utilized to develop the prediction model for elastic modulus of random short fiber reinforced composite (RSFRC). By virtue of this model, elastic modulus of glass fiber reinforced PA6 composite is predicted. The tolerance between calculated results and the tensile test values is less than 5%, which testified the good accuracy of the prediction model for elastic modus of RSFRC.

Keywords: random short fiber reinforced composite; elastic modulus; prediction model; Reuss-Voigt model; 3D fiber orientation

纤维增强复合材料(FRP)的力学性能除了决定于基体材料和纤维材料的物理属性外，还与纤维的体积分数、长径比及纤维排列方式等几何特性有关[1-3]。对纤维增强复合材料的模量预测的理论有：考虑了纤维取向和体积分数的 Halpin-Tsai 半经验方程[4]，Eshelby 等效夹杂理论[5]，Mori-Tanaka 方法[6]，自洽法[7]；考虑了纤维体积分数、长径比、排列方式的剪切滞后模型[8]及修正的剪切滞后模型[1-2]和有限元方法[9]等。对于不连续但排列规则的 FRP，Chun-Hway[2,10]修正了 Cox 的剪切滞后模型，分析了复合材料的弹性模量。对于不连续且排列不规则的随机纤维增强复合材料，Fu[11]引入纤维取向分布函数，借助 Cox 的剪切滞后模型[12]和 Halpin-Tsai 方程得出各种纤维分布函数下复合材料的弹性模量。

在众多工程应用中，短纤维复合材料中纤维多呈随机分布，使材料宏观表现为各向同性，且纤维之间存在相互影响，不能仅考虑单个代表体积单元进行分析。因此，本文作者通过构造 Reuss-Voigt 混合率模型及三维纤维取向简化模型，构造了随机短纤维复合材料弹性模量预测模型，并通过实验对比分析验证了模型的可靠性。

1 理论模型

1.1 混合率模型

Reuss 混合率模型假设复合材料中的纤维与基体串联，且纤维与基体宽度相同，复合材料弹性模量为

$$E_c = \frac{E_f E_m}{E_f V_f + E_m(1 - V_f)} \tag{1}$$

式中：E_f 为纤维弹性模量；E_m 为基体弹性模量；V_f 为纤维体积分数。

Voigt 模型假设复合材料中的纤维与基体并联，且纤维与基体长度相同，复合材料弹性模量为

收到初稿日期： 2011-07-01；**收到修改稿日期：** 2011-12-20；**网络出版时间：** 2012-02-09 16:16:01
网络出版地址： www.cnki.net/kcms/detail/11.1801.TB.20120209.1616.004.html
通讯作者： 潘红良，博士，教授，研究方向：纤维复合材料滚动摩擦学 E-mail：hlpan@ecust.edu.cn

$$E_c = E_f V_f + E_m(1 - V_f) \tag{2}$$

式中：E_f 为纤维弹性模量；E_m 为基体弹性模量；V_f 为纤维体积分数。

1.2　剪切滞后模型

基体上的应力通过纤维与基体的界面传递给纤维，在纤维端部区域，纤维的作用不满足上述 Reuss 模型及 Voigt 模型，而剪切滞后模型考虑了纤维端部的影响，表示为

$$E_c = E_f\left[1 - \frac{\tanh(\beta l/2)}{\beta l/2}\right]V_f + E_m(1 - V_f) \tag{3}$$

式中：E_f 为纤维弹性模量；E_m 为基体弹性模量；V_f 为纤维体积分数；l 为纤维长度；β 表示为

$$\beta = \left[\frac{2G_m}{\pi r^2 E_f \ln(b/a)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

式中：G_m 为基体剪切模量；a 为纤维半径；b 为代表体积单元半径。

1.3　Reuss-Voigt 模型

剪切滞后模型中典型的代表体积单元(RVE)如图 1 所示。模型中纤维的直径为 $2a$、长度为 $2l$，同轴嵌入在直径为 $2b$、长度 $2l'$ 的基体中。当同轴载荷作用于 RVE 两端时，如图 2 所示，假设 RVE 内的应力场分为四个区域：Ⅰ区为应力均匀且受纤维影响的基体材料；Ⅱ区为应力均匀但不受纤维影响的基体材料；Ⅲ区为应力均匀的纤维材料；Ⅳ区为处于纤维末端的应力不均匀区，包括纤维根部及其周边的基体，由于剪切滞后的原因，该段纤维承受载荷较低，因此可将其视为无效段，其长度 δ 根据 Rosen 的推导[13]：

$$\delta = a\left[\left(\frac{1}{\sqrt{V_f}} - 1\right)\frac{E_f}{E_m}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

其中：E_f 为纤维弹性模量；E_m 为基体弹性模量；V_f 为纤维体积分数。

因此，RVE 可视为Ⅰ区与Ⅲ区并联后与Ⅱ区串联，消除纤维几何参数后的 Reuss-Voigt 模型，如图 3 所示[14]。其中

$$E^{\mathrm{I}} = \frac{1 - r^2}{f}E_1,\ E^{\mathrm{II}} = (1 - f)E_1,\ E^{\mathrm{III}} = \frac{r^2}{f}E_2,$$

$$r = a/b,\ f = (l - \delta)/l'$$

当载荷 σ 作用于模型两端时：

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma}{E^{\mathrm{II}}} + \frac{\sigma}{E^{\mathrm{I}} + E^{\mathrm{III}}} \tag{6}$$

由式(5)～式(6)得出 Reuss-Voigt 模型的弹性模量：

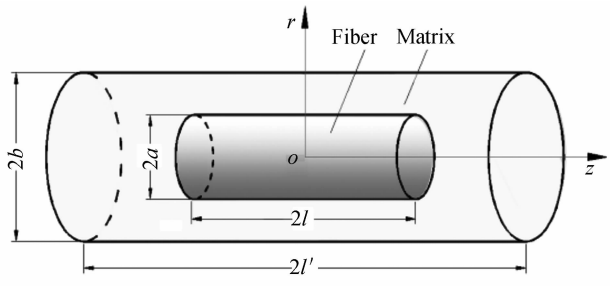

图 1　FRP 代表体积单元

Fig. 1　Representative element volume (RVE) of FRP

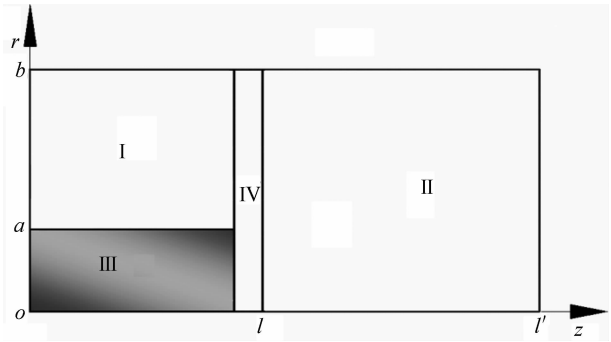

图 2　FRP 代表体积单元的应力场划分

Fig. 2　Stress filed distribution in RVE of FRP

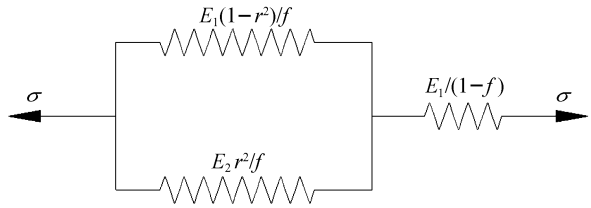

图 3　Reuss-Voigt 模型

Fig. 3　Reuss-Voigt model

$$E_c = \left[\left(1 - r^2 + \frac{E_2}{E_1}r^2\right)^{-1} f + 1 - f\right]^{-1} E_1 \tag{7}$$

1.4　随机短纤维复合材料简化模型

对三维取向短纤维复合材料弹性模量的研究，Fu[11]考虑了纤维空间取向，在 Cox 剪切滞后模型以及 Halpin-Tsai 模型的基础上推导出各向异性复合材料的弹性模量。其中，纤维三维取向通过函数 $F(\theta,\varphi)$ 表征(图 4)。

由于材料的弹性模量主要与纤维取向和主方向的夹角 θ 有关，受 φ 影响不大。因此，图 5(a)所示的三维取向问题可以简化为图 5(b)所示的二维取向问题。根据纤维的二维取向，可将模型简化分解为图 5(c)所示具有不同 θ 角的材料层的叠加。在研究单根纤维的 RVE 模型时没有考虑纤维之间的相互影响，然而模型中未受纤维增强的基体可能受到

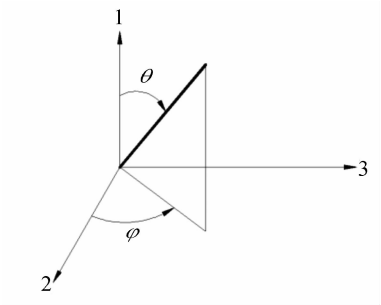

图 4　纤维空间取向定义

Fig. 4　Fiber 3D orientation

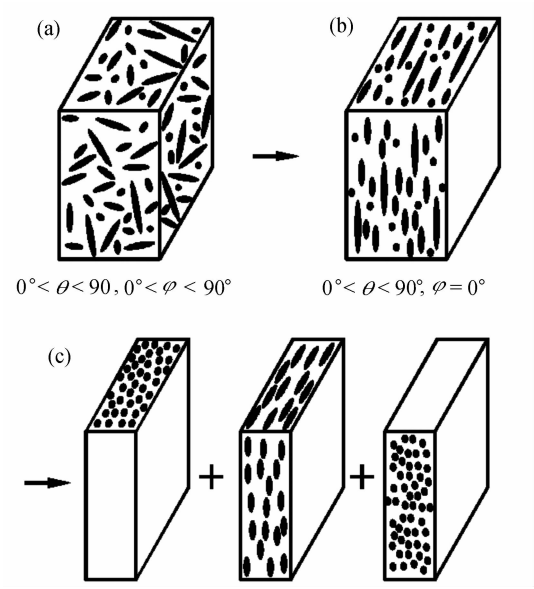

图 5　随机短纤维复合材料简化模型

Fig. 5　Simplified model of random FRP

相邻纤维的增强，而且纤维长径比及体积分数增大，未受纤维增强的区域则较小。因此在随机短纤维模型中，假设等效纤维长度 l' 等于代表体积单元长度 l。

1.5　随机纤维增强复合材料预测模量

纤维对复合材料的增强作用主要取决于纤维沿主方向上的分量，即

$$f' = f\cos\theta, \quad r'^2 = r^2/\cos\theta \tag{8}$$

将式(8)代入式(7)，并按照图 5 所示模型进行积分，得

$$E_c = \frac{2E_1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{f\cos\theta}{1 - r^2/\cos\theta + \frac{E_2}{E_1}r^2/\cos\theta} + 1 - f\cos\theta\right]^{-1} \mathrm{d}\theta \tag{9}$$

随机短纤维复合材料弹性模量可表示为

$$E_c = \left[\frac{1}{(1 - ar^2 f)} - \frac{ab^2 f}{\pi(b^2 - 1)^{1/2}}\tan\frac{b - 1}{(b^2 - 1)^{1/2}}\right]E_1 \tag{10}$$

其中

$$a = \left(\frac{E_2}{E_1} - 1\right), \; b = \frac{ar^2}{1 - ar^2 f}$$

2　计算结果与实验比较

利用上述随机纤维增强复合材料预测模量，对短玻纤增强尼龙 6(PA6)复合材料弹性模量进行预测。玻璃纤维弹性模量 75 GPa，长径比 400，PA6 弹性模量1.52 GPa，泊松比 0.4。对玻璃纤维质量分数为 5%、10%和 20%的 PA6 复合材料在 25 ℃下进行拉伸实验，测试其弹性模量，实验拉伸速度 3 mm/min。

表 1 给出了 PA6 复合材料弹性模量的实验结果与理论结果对比，并计算了理论模型的误差。其结果看出，模型预测值的误差在 2.28%～4.44%之间，说明该理论模型具有较好的准确性。

表 1　玻纤 PA6 复合材料弹性模量的拉伸实验值与理论值对比

Table 1　Comparison of elastic modulus of glass fiber reinforced PA6 composite between tensile test value and theoretic value

Mass fraction/%	Volume fraction/%	$E_{experiment}$/GPa	$E_{theoretic}$/GPa	$t_{tolerance}$/%
5	2.22	2.64	2.5229	4.44
10	4.57	3.23	3.2197	3.20
20	9.72	4.28	4.3775	2.28

图 6 给出了 PA6 复合材料预测弹性模量随纤维体积分数变化曲线。可见，随机纤维复合材料的弹性模量几乎随纤维体积分数增加线性增长，其趋势与实际实验结果一致。

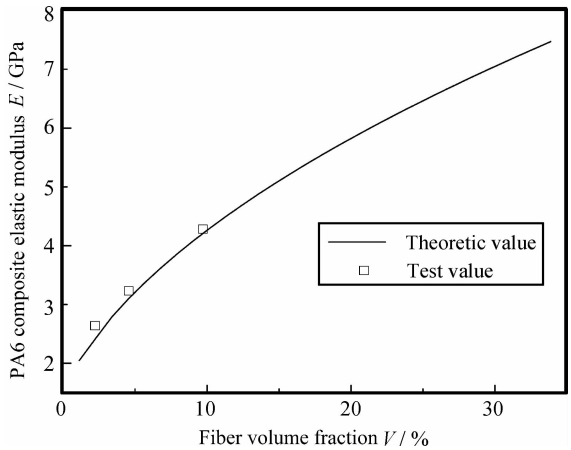

图 6　纤维体积分数对玻纤 PA6 复合材料弹性模量的影响

Fig. 6　Effect of fiber volume fraction on elastic modulus of glass fiber reinforced PA6 composite

3 结　　论

（1）随机短纤维复合材料弹性模量预测模型计算结果与实验结果误差小于5%，表明该预测模型具有较好的准确性。

（2）玻纤增强PA6复合材料的弹性模量与玻纤体积分数成线性关系。

参考文献：

[1] Mondali M，Abedian A，Ghavami A. A new analytical shear-lag based model for prediction of the steady state creep deformations of some short fiber composites [J]. Materials & Design，2009，30(4)：1075-1084.

[2] Hsueh C H. Young's modulus of unidirectional discontinuous-fibre composites [J]. Composites Science and Technology，2000，60(14)：2671-2680.

[3] Sharma M，Mohan Rao I，Bijwe J. Influence of fiber orientation on abrasive wear of unidirectionally reinforced carbon fiber - polyetherimide composites [J]. Tribology International，2010，43(5/6)：959-964.

[4] Halpin John C. Primer on composite materials [J]. Materials & Design，1984，6(3)：145-145.

[5] Eshelby J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems [C]//Proceedings of the Royal Society. London：The Royal Soiety，1957.

[6] Mori T，Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions [J]. Acta Metallurgica，1973，21(5)：571-574.

[7] Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids，1965，13(4)：213-222.

[8] Cox H L. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials [J]. British Journal of Applied Physics，1952，3(3)：72-79.

[9] 李红周，贾玉玺，姜　伟，等. 纤维增强复合材料的细观力学模型以及数值模拟进展 [J]. 材料工程，2006(8)：57-60.
Li Hongzhou，Jia Yuxi，Jiang Wei，et al. Progress in numerical simulations and mesoscopic - mechanical models of fiber - reinforced composites [J]. Journal of Materials Engineering，2006(8)：57-60.

[10] Hsueh C H. Modified analysis for stress transfer in fibre - reinforced composites with bonded fibre ends [J]. Journal of Materials Science，1995，30(1)：219-224.

[11] Fu S Y，Lauke B. An analytical characterization of the anisotropy of the elastic modulus of misaligned short - fiber - reinforced polymers [J]. Composites Science and Technology，1998，58(12)：1961-1972.

[12] Hancox N L. Primer on composite materials analysis [J]. Materials & Design，1992，13(6)：369.

[13] Wang J，Uma S，Klabunde K J. Visible light photocatalysis in transition metal incorporated titania - silica aerogels [J]. Applied Catalysis B：Environmental，2004，48(2)：151-154.

[14] 任　超，陈建均，潘红良. 纤维增强复合材料黏弹性行为的预测模型 [J]. 复合材料学报，2012，29(1)：162-168.
Ren Chao，Chen Jianjun，Pan Hongliang. Prediction model for visco-elastic behavior of fiber reinforced composites [J]. Acta Materiae Compositae Sinica，2012，29(1)：162-168.