复合材料学报 Acta Materiae Compositae Sinica
第29卷 第4期 8月 2012年
Vol. 29 No. 4 August 2012

文章编号：1000-3851(2012)04-0178-08

梯度复合材料热传导分析的梯度单元法

陈 康，许希武*

（机械结构力学及控制国家重点实验室，南京航空航天大学 结构与强度研究所，南京 210016）

摘 要： 给出了一种适用于梯度复合材料热传导分析的梯度单元，采用细观力学方法描述材料变化的热物理属性，通过线性插值和高阶插值温度场分别给出了4节点和8节点梯度单元随空间位置变化的热传导刚度矩阵。推导了在温度梯度载荷和热流密度载荷作用下，矩形梯度板的稳态温度场和热通量场精确解。基于该精确解对比了连续梯度模型和传统的离散梯度模型的热传导有限元计算结果，验证了梯度单元的有效性，并讨论了相关参数对梯度单元的影响。结果表明，梯度单元和均匀单元得到的温度场基本一致；当热载荷垂直于材料梯度方向时，梯度单元能够给出更加精确的局部热通量场；当热载荷平行于材料梯度方向时，4节点梯度单元性能恶化，8节点梯度单元和均匀单元的计算结果与精确解吻合很好。

关键词： 梯度单元；热传导分析；梯度复合材料；有限元方法；细观力学

中图分类号： TB332 **文献标志码：** A

Graded element method for the heat conduction analysis of gradient composites

CHEN Kang, XU Xiwu*

(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Institute of Structure & Strength, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Graded finite elements were proposed for the heat conduction analysis of gradient composites whose thermal properties were described by micromechanics. The spatially varying stiffness matrices of four-node and eight-node graded elements were calculated through linear and high-order interpolations of temperature fields. Several exact steady-state temperature and flux fields of graded composite plates under temperature gradient and thermal flux loads were presented. With reference to the exact solutions, the heat conduction finite element results of continuous gradient models and conventional, step-wise models were compared to validate the graded elements. The effects of some parameters on the graded elements were also discussed. It shows that the temperature fields resulting from graded and homogeneous elements are nearly the same; the graded elements can give more accurate local flux fields than homogeneous elements do when thermal loads are perpendicular to the material gradation; when they are parallel, the eight-node quadrilateral and homogeneous elements are both excellent, nevertheless, the four-node quadrilateral elements are worse.

Keywords: graded element; heat conduction analysis; gradient composites; finite element method; micromechanics

功能梯度材料由于其优异的热力学性能和材料的可设计性而越来越广泛地应用于工程热力学领域，该类新型复合材料在不同的热载荷和温度环境下的热传导特性以及温度场分布也受到了广泛关注。

Sladek 等[1]提出了一种无网格局部边界积分技术，陈建桥等[2]采用无网格 Petrov-Galerkin 方法，Khosravifard 等[3]基于一种改进的无网格径向点插值法，分别研究了功能梯度材料的瞬态热传导问题。Sutradhar 和 Paulino[4]提出一种改进的边界元法，Fu 等[5]采用边界节点法研究了功能梯度板的瞬态温度场分布。许杨健和涂代惠[6]采用有限单元法结合有限差分法，Charoensuk 和 Vessakosol[7]采用高阶有限体积法，分别研究了各向同性功能梯度材料的热传导问题。然而，上述方法均比较

收到初稿日期： 2011-07-11；**收到修改稿日期：** 2011-11-11；**网络出版时间：** 2012-02-09 16:19:01
网络出版地址： www.cnki.net/kcms/detail/11.1801.TB.20120209.1619.009.html
通讯作者： 许希武，教授，博士生导师，主要从事复合材料结构力学、飞行器结构完整性评定技术和计算力学等领域的科研和教学工作
E-mail：xwxu@nuaa.edu.cn

复杂，不利于工程实际应用。

有限单元法由于其适用范围广、标准化程度高而成为工程上应用最为广泛的数值计算方法。对于非均匀梯度复合材料，有限元模型中准确地实现材料属性的连续变化非常重要。Anlas 等[8]、张幸红等[9]将结构沿梯度方向划分成若干属性均匀的区域，建立了分段均匀的离散梯度有限元模型。Gu 等[10]、Ayhan[11]通过在单元积分点处赋予变化的材料参数实现了材料属性的连续变化，Kim 和 Paulino[12]、Santare 和 Lambros[13]编写了一种新的梯度单元，其刚度矩阵表现为位置的函数，从而建立了结构的连续梯度有限元模型。显然，考虑了刚度矩阵随位置变化的梯度单元无疑是一种优越的有限元建模手段。目前对于热传导梯度单元的报道较少。Chen 等[14]的研究中涉及到热传导梯度单元，但是并没有对其计算性能做出详细探讨，其提出的梯度单元属于 4 节点线性单元，具有一定的局限性(详见下文)。此外，关于 8 节点高阶热传导梯度单元，目前尚没有文献涉及。

本文作者推导了一种适用于梯度复合材料热传导分析的梯度有限单元，采用细观力学方法描述材料变化的热物理属性，通过线性插值和高阶插值温度场分别给出了 4 节点和 8 节点梯度单元随空间位置变化的热传导刚度矩阵，并建立了结构的连续梯度有限元模型。推导了在温度梯度载荷和热流密度载荷作用下，矩形梯度板稳态温度场和热通量场的精确解。基于该精确解对比了连续梯度模型和传统的离散梯度模型的热传导有限元计算结果，验证了梯度单元的有效性，并讨论了相关参数对梯度单元的影响。

1　梯度材料稳态热传导精确解

本文中讨论的梯度板的几何尺寸以及所施加的温度载荷如图 1 所示。假设材料组分的体积含量和等效热物理属性沿 y 方向连续变化，主要讨论四种热载荷以及温度边界条件：(1) 沿 x 方向施加恒定的温度梯度载荷；(2) 沿 x 方向施加均布的热流密度载荷以及温度边界条件；(3) 沿 y 方向施加恒定的温度梯度载荷；(4) 沿 y 方向施加均布的热流密度载荷以及温度边界条件。

1.1　载荷垂直于梯度方向(沿 x 方向)

假设材料内部没有热源作用，梯度复合材料板的二维稳态热传导微分方程为

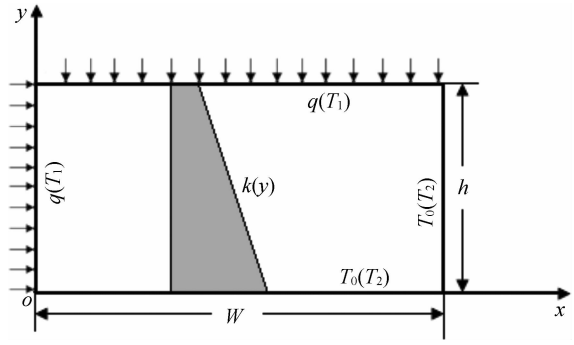

图 1　梯度复合材料板示意图

Fig. 1　Schematic diagram of the graded composite plate

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(y)\frac{\partial T}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[k(y)\frac{\partial T}{\partial y}\right]=0 \tag{1}$$

首先，沿 x 方向施加恒定的温度梯度载荷(左侧 T_1，右侧 T_2)，此时温度场仅仅表现为 x 的函数，即 $T=f(x)$，带入式(1)得

$$k(y)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=0 \tag{2}$$

因此温度场可以表示为

$$T(x)=Ax+B \tag{3}$$

结合边界条件 $x=0$ 处，$T=T_1$；$x=W$ 处，$T=T_2$，得到温度场的具体表达式：

$$T(x)=\frac{T_2-T_1}{W}x+T_1 \tag{4}$$

另外，热通量场可表示为

$$\begin{cases} q_x=\dfrac{T_1-T_2}{W}k(y) \\ q_y=0 \end{cases} \tag{5}$$

在沿 x 方向热流密度载荷(左侧 q，右侧 T_0)的作用下，距离 $x=0$ 边界足够远处，温度场同样只表现为 x 的函数，即

$$T(x)=Ax+B \tag{6}$$

热通量场 $q_x=-Ak(y)$，根据热量守恒

$$-\int_0^h Ak(y)\mathrm{d}y=qh \tag{7}$$

得到

$$A=-\frac{qh}{\int_0^h k(y)\mathrm{d}y} \tag{8}$$

此外，根据边界条件 $x=W$ 处，$T=T_0$ 有

$$B=T_0-AW \tag{9}$$

因此温度场和热通量场的具体表达式为

$$T(x)=-\left[\frac{qh}{\int_0^h k(y)\mathrm{d}y}\right]x+T_0+W\frac{qh}{\int_0^h k(y)\mathrm{d}y} \tag{10}$$

$$\begin{cases} q_x = k(y)\dfrac{qh}{\int_0^h k(y)\mathrm{d}y} \\ q_y = 0 \end{cases} \tag{11}$$

1.2　载荷平行于梯度方向(沿 y 方向)

在 y 方向温度梯度载荷(上侧 T_1，下侧 T_2)的作用下，温度场只表现为 y 的函数，即 $T=f(y)$，带入式(1)得

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[k(y)\frac{\partial T}{\partial y}\right]=0 \tag{12}$$

因此温度场可以表示为

$$T(y)=A\int_0^y \frac{1}{k(y)}\mathrm{d}y+B \tag{13}$$

结合边界条件：$y=0$ 处，$T=T_2$；$y=h$ 处，$T=T_1$，得到温度场的具体表达式：

$$T(y)=\left[\frac{T_1-T_2}{\int_0^h \frac{1}{k(y)}\mathrm{d}y}\right]\int_0^y \frac{1}{k(y)}\mathrm{d}y+T_2 \tag{14}$$

热通量场为

$$\begin{cases} q_x = 0 \\ q_y = \dfrac{T_2-T_1}{\int_0^h \frac{1}{k(y)}dy} \end{cases} \tag{15}$$

在沿 y 方向热流密度载荷(上侧 q，下侧 T_0)的作用下，热通量场为

$$\begin{cases} q_x = 0 \\ q_y = -q \end{cases} \tag{16}$$

该类载荷作用下，远离边界 $y=h$ 处温度场同样仅为 y 的函数，如式(13)所示，结合式(16)和边界条件 $y=0$ 处，$T=T_0$ 得

$$T(y)=q\int_0^y \frac{1}{k(y)}\mathrm{d}y+T_0 \tag{17}$$

在上面的推导中，对于材料的等效热传导系数 $k(y)$，为了更加准确且具有一般性，本文中采用细观力学的方法给出，具体见第三节。

2　等效性能和热传导梯度单元

对于梯度复合材料，沿梯度方向材料组分体积分数的连续变化导致了其宏观性能的非均匀性。本文中假设组分体积分数按照下面的指数规律分布：

$$V_1=V_\mathrm{b}+(V_\mathrm{t}-V_\mathrm{b})\left(\frac{y}{h}\right)^N,\ V_2=1-V_1 \tag{18}$$

其中：V_1 和 V_2 分别表示组分 1 和组分 2 的体积分数；V_b 和 V_t 分别表示在 $y=0$ 处和 $y=h$ 处组分 1 的体积分数。采用三相模型描述材料等效热传导系数的分布：

$$k^*(y)=k_2V_2+k_1V_1+V_2V_1\frac{k_2-k_1}{\dfrac{3k_2}{k_1-k_2}+V_2} \tag{19}$$

其中：k_1 和 k_2 为组分 1 和组分 2 的热传导系数，k^* 是材料等效热传导系数。在只考虑热对流边界条件下，梯度材料稳态热传导的等效能量泛函为

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_V k^*(y)\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}V-\int_{\Gamma_2} qT\,\mathrm{d}\Gamma \tag{20}$$

式中：Γ_2 是结构的热对流边界；q 是边界上作用的热流载荷；T 是温度场。有限单元法中基于节点处的温度值通过插值函数得到整个单元内部的温度场分布。对于 4 节点等参单元有

$$T^{(\mathrm{e})}=[N_1,N_2,N_3,N_4]\begin{Bmatrix} T_1^{(\mathrm{e})} \\ T_2^{(\mathrm{e})} \\ T_3^{(\mathrm{e})} \\ T_4^{(\mathrm{e})} \end{Bmatrix}=[N]\{T\}^{(\mathrm{e})} \tag{21}$$

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)\quad (i=1\sim 4) \tag{21a}$$

其中：$[N]$ 是单元插值函数列阵；(ξ_i,η_i) 是节点的高斯坐标。对于 8 节点等参单元只需要将式(21)中插值函数和节点温度的数目扩展为 8 个即可，其具体的插值函数形式(即式(21a))可以参考任意的有限元教材，这里略去。将式(21)带入到式(20)中，由 $\delta\Pi=0$ 得到有限元方程

$$[K]\{T\}=\{P\} \tag{22}$$

式中：$[K]$ 是热传导刚度矩阵；$\{T\}$ 是节点温度列阵；$\{P\}$ 是温度载荷列阵。其中

$$K_{ij}=\sum_{e=1}^{M}\int_{V^e} k^*(y)\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)\mathrm{d}V \tag{23}$$

$$P_i=\sum_{e=1}^{M}\int_{\Gamma_2^e} qN_i\,\mathrm{d}\Gamma \tag{24}$$

对于 4 节点等参单元，式(23)可以展开为

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}=[J]^{-1}\begin{Bmatrix} \dfrac{1}{4}\xi_i(1+\eta_i\eta) \\ \dfrac{1}{4}\eta_i(1+\xi_i\xi) \end{Bmatrix}\quad (i=1\sim 4) \tag{23a}$$

$$[J]=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4}\dfrac{1}{4}\xi_i(1+\eta_i\eta)x_i & \sum_{i=1}^{4}\dfrac{1}{4}\xi_i(1+\eta_i\eta)y_i \\ \sum_{i=1}^{4}\dfrac{1}{4}\eta_i(1+\xi_i\xi)x_i & \sum_{i=1}^{4}\dfrac{1}{4}\eta_i(1+\xi_i\xi)y_i \end{bmatrix} \tag{23b}$$

其中：M 为单元的数目；$[J]$ 是雅可比矩阵（对于 8 节点等参单元，式(23a，23b)可以参考任意的有限元教材。限于篇幅，这里略去）。对于梯度材料，由于式(23)中的 $k^*(y)$ 是位置坐标的连续函数，因此得到的梯度单元热传导刚度矩阵 $[K]$ 随位置连续变化。当然，本文中提出的梯度有限元方法并不仅仅局限于热对流边界条件和热传导稳态问题。例如考虑热交换边界条件时，则需要对热传导刚度矩阵和载荷列阵做如下修正：

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^{M}\int_{V^e} k^*(y)\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)\mathrm{d}V + \sum_{e=1}^{M}\int_{\Gamma_3^e} h(y)N_iN_j\,\mathrm{d}\Gamma \tag{25}$$

$$P_i = \sum_{e=1}^{M}\left(\int_{\Gamma_2^e} qN_i\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_3^e} h(y)T_\infty N_i\,\mathrm{d}\Gamma\right) \tag{26}$$

3　算例验证和讨论

通过编写 ABAQUS 的自定义单元用户子程序 UEL，将本文中提出的热传导梯度单元嵌入到商用有限元软件中，建立梯度复合材料板的连续梯度有限元模型。虽然梯度单元的优越性更多体现在复杂的载荷边界条件下，但是为了与第一节中的精确解对比，这里采用简单的算例。模型中采用四边形等参单元离散，沿 x 向布置 20 个单元，沿 y 向布置 10 个单元。算例中采用 ZrO_2/Ti－6Al－4V 梯度材料体系[15]，组分的热传导系数为 $k_{ZrO_2}=1.783$ W/(m·℃)，$k_{Ti-6Al-4V}=6.2$ W/(m·℃)。具体的载荷施加情况如下。温度梯度载荷：$T_1=200$ ℃，$T_2=100$ ℃；热流密度载荷：$q=1000$ W·m^{-2}，$T_0=100$ ℃；模型的尺寸：$W=20$ mm，$h=10$ mm。

3.1　垂直梯度方向载荷

为了观察不同的性能梯度对梯度单元计算精度的影响，并与均匀单元（单元内部的属性取其中心处，并均匀分布）相比较，本文中给出了三种组分分布形式下的计算结果，即式(18)中的 $N=0.2$、$N=1.0$、$N=5.0$。图 2～图 7 给出了在垂直于梯度方向的热载荷作用下，4 节点梯度/均匀单元以及 8 节点梯度/均匀单元计算得到的热通量场（均为 $x=0.01$ m 位置处）分布，并与第一节的精确解相比较。

从图 2～图 3 中可以看出，当 $N=0.2$ 时，在垂直于梯度方向的热载荷作用下，梯度单元能够明显改善局部热通量场的计算精度。在每个单元内部，均匀单元给出的局部热通量保持恒定，仅在单元中心处与精确解重合，而梯度单元则呈现出近似线性的分布形式，并始终与精确解吻合很好。在板的下侧，均匀单元计算结果的误差很大，在上侧两种单元的计算精度较为接近。这主要是因为在 $N=0.2$ 的情况下，板的下侧组分体积分数变化剧烈，造成材料的性能梯度很大，上侧材料梯度变化缓和。因此不难推测，为了得到足够精确的局部热通量场，采用均匀单元的离散模型就必须在板的下侧划分极为精细的网格，而基于梯度单元的连续模型则可以采用相对较稀疏的网格。实际上，在垂直梯度方向的热载荷作用下，温度场呈线性分布（见第一节），采用线性（高阶）插值函数的梯度单元能够精确拟和实际温度场，因此任意的网格密度（甚至一个单元）均可以得到足够精确的局部热通量。此外，还可以看出，当热载荷垂直于材料的梯度方向时，4 节点梯度单元和 8 节点梯度单元的计算精度基本一致。

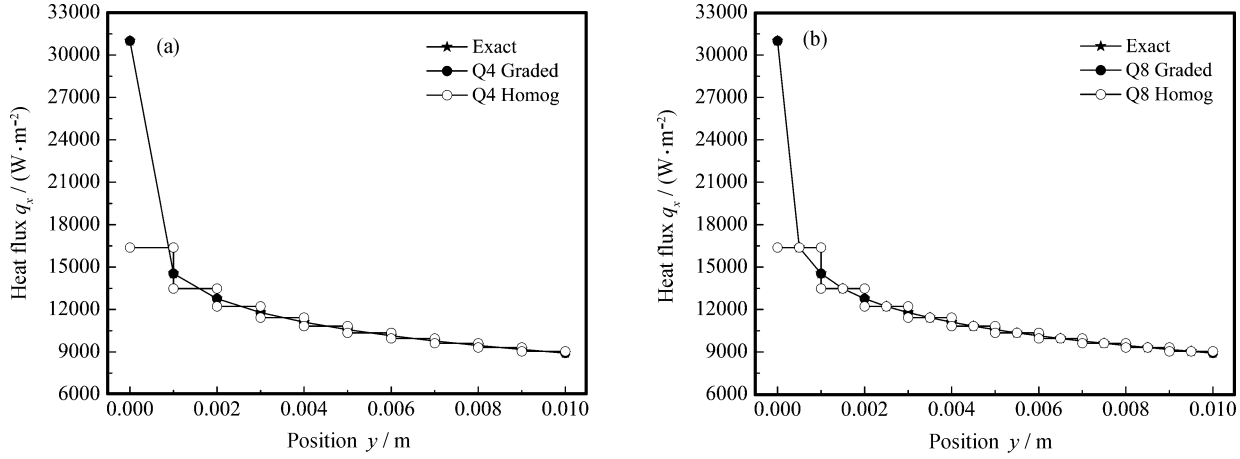

图 2　$N=0.2$ 时 x 方向温度梯度载荷作用下 ZrO_2/Ti－6Al－4V 梯度板的 x-热通量场

Fig. 2　x-flux field of ZrO_2/Ti－6Al－4V graded plate under x-temperature gradient load when $N=0.2$

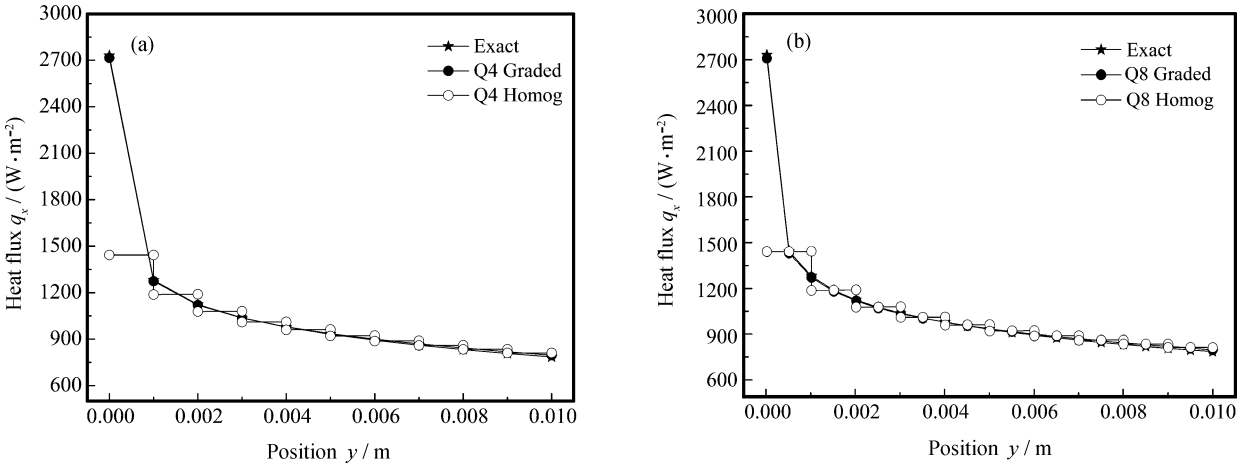

图 3　$N=0.2$ 时 x 方向热流密度载荷作用下 $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ 梯度板的 x-热通量场

Fig. 3　x-flux field of $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ graded plate under x-thermal flux load when $N=0.2$

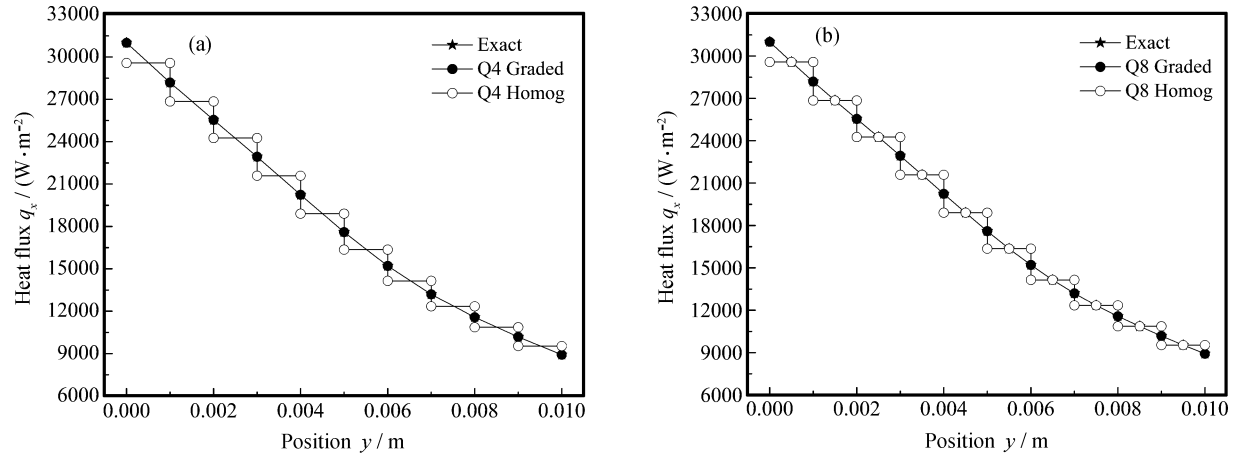

图 4　$N=1.0$ 时 x 方向温度梯度载荷作用下 $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ 梯度板的 x-热通量场

Fig. 4　x-flux field of $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ graded plate under x-temperature gradient load when $N=1.0$

当 $N=1.0$ 时，梯度单元和均匀单元计算得到的热通量场如图 4～图 5 所示。同样，在单元尺寸的数量级上，梯度单元能够给出更加精确的局部热通量计算结果。在该组分分布形式下，材料的性能梯度全场较为均匀，因此没有观察到均匀单元计算精度急剧恶化的区域。同样，4 节点梯度单元和 8 节点梯度单元的计算精度基本相同。

图 6～图 7 给出了当 $N=5.0$ 时梯度单元和均匀单元计算得到的热通量场。同样，梯度单元给出的结果更加精确。在单元内部，均匀单元得到的热通量仅在中心处与精确解重合，梯度单元则与精确解吻合很好。另外，在板的上侧均匀单元的计算精度急剧恶化，梯度单元依旧可以得到准确的局部热通量，板的下侧两者的计算精度基本一致。这主要是因为当 $N=5.0$ 时，在板的上侧材料的性能梯度很大，下侧材料梯度变化缓和。因此，采用离散梯度模型在板的上侧必须划分极为精细的网格，而基于梯度单元的连续模型则可以采用任意稀疏的网格密度。同样，4 节点梯度单元和 8 节点梯度单元的计算精度基本一致。

图 8 给出了当热载荷垂直于材料梯度方向时，均匀单元和梯度单元计算得到的温度场分布（$y=0.005$ m 处）。可以看出，沿垂直梯度方向温度场均呈线性分布，4 节点梯度/均匀单元和 8 节点梯度/均匀单元的计算结果基本一致，均与精确解吻合很好，且计算精度不受材料梯度变化的影响。另外可以看出，当作用温度梯度载荷时，N 的取值对温度场没有影响（如式(4)所示）；当作用热流密度载荷时，随着 N 的增大，温度场降低。

3.2　平行梯度方向载荷

图 9 给出了在平行于材料梯度方向作用热流密度载荷时，沿 y 方向热通量场（$x=0.01$ m 处）的分

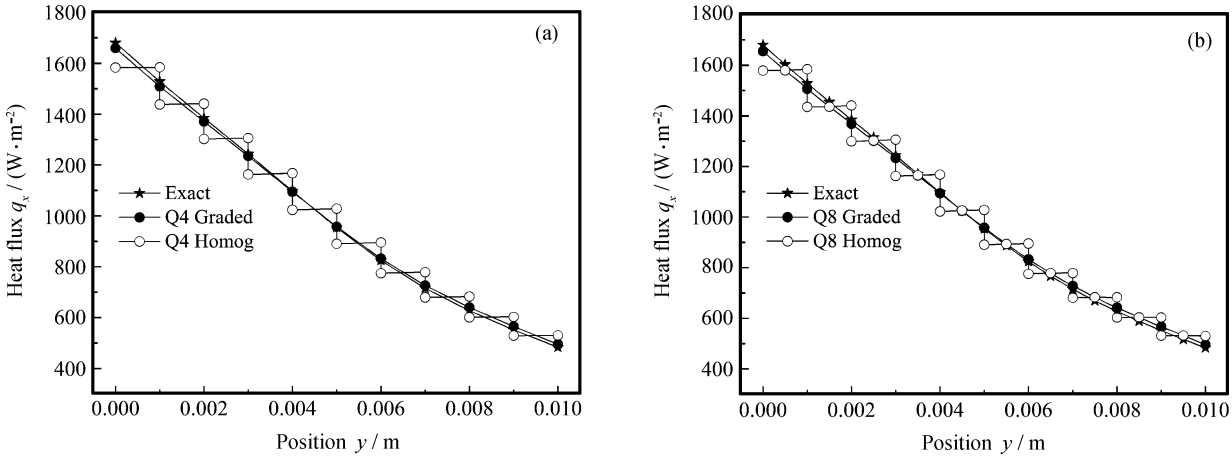

图 5　$N=1.0$ 时 x 方向热流密度载荷作用下 $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ 梯度板的 x-热通量场

Fig. 5　x-flux field of $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ graded plate under x-thermal flux load when $N=1.0$

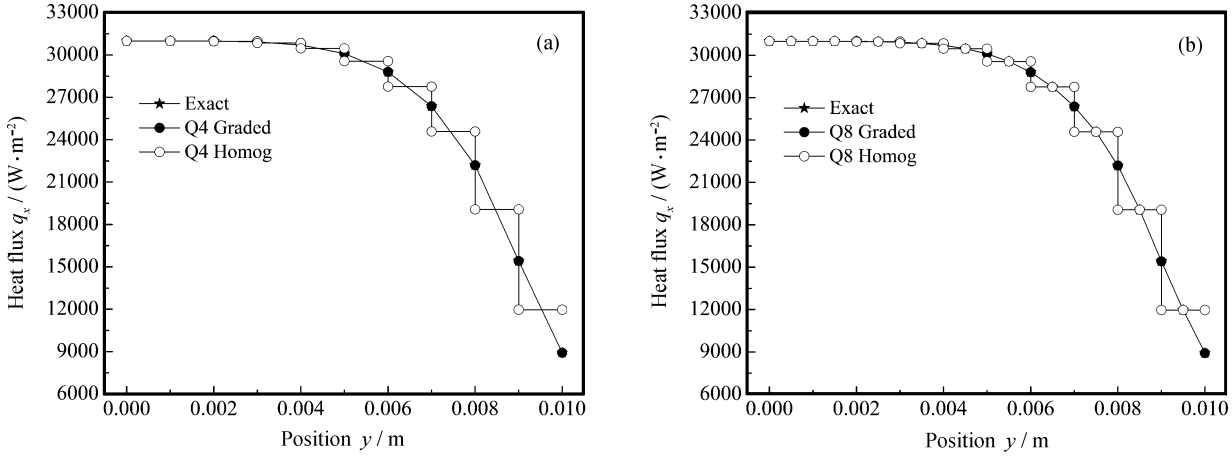

图 6　$N=5.0$ 时 x 方向温度梯度载荷作用下 $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ 梯度板的 x-热通量场

Fig. 6　x-flux field of $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ graded plate under x-temperature gradient load when $N=5.0$

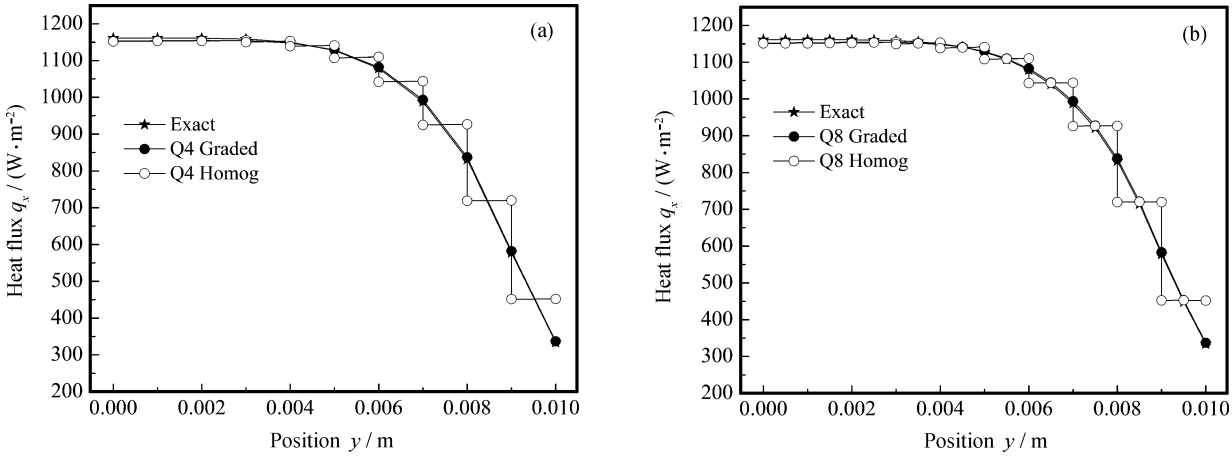

图 7　$N=5.0$ 时 x 方向热流密度载荷作用下 $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ 梯度板的 x-热通量场

Fig. 7　x-flux field of $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ graded plate under x-thermal flux load when $N=5.0$

布，计算中取 $N=1.0$。图 9(a)采用 4 节点单元，从图中可以看出，与前面的结论相反，4 节点梯度单元呈现出反常的振荡行为，其计算得到的局部热通量出现较大的偏差，而 4 节点均匀单元的计算结

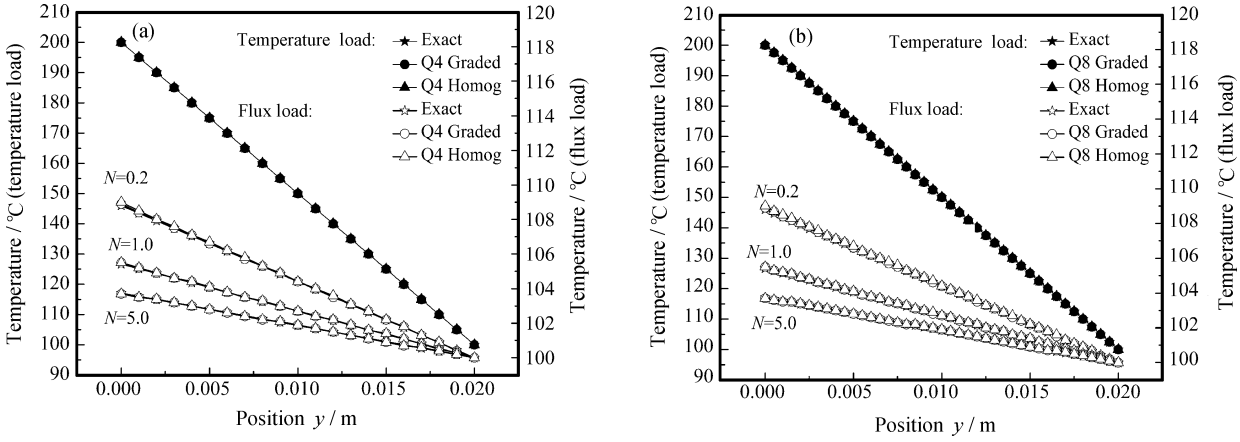

图 8　x 方向热载荷作用下(y=0.005 m)ZrO_2/Ti－6Al－4V 梯度板的温度场

Fig. 8　Temperature field of ZrO_2/Ti－6Al－4V graded plate under x-thermal load (y=0.005 m)

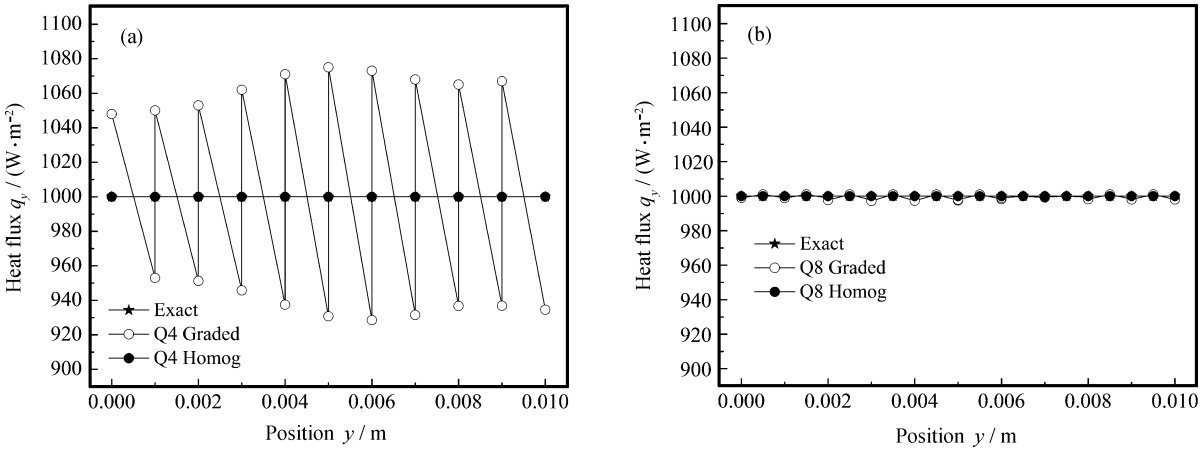

图 9　N=1.0 时 y 方向热流密度载荷作用下(x=0.01 m)ZrO_2/Ti－6Al－4V 梯度板的 y-热通量场

Fig. 9　y-flux field of ZrO_2/Ti－6Al－4V graded plate under y-thermal flux load (x=0.01 m) when N=1.0

果与精确解完全吻合。通过分析得到，该情况主要是由于 4 节点单元采用的线性插值函数所致。在平行梯度方向作用热流密度载荷时，结构中温度梯度场呈现 $q/k(y)$ 的分布规律(见第一节)。然而对于 4 节点单元，采用的线性插值函数只能给出均布的温度梯度场，在此基础上，性能变化的梯度单元给出非均布的局部热通量，而属性恒定的均匀单元则得到均布的局部热通量。显然，采用高阶插值函数的梯度单元即可改善该情况下的计算精度，如图 9(b)所示，8 节点梯度单元由于采用了高阶插值函数，其计算得到的局部热通量场与精确解吻合很好。

图 10 给出了在平行梯度方向热流密度载荷的作用下，沿 y 方向的温度场分布(x=0.01 m 处)。可以得到，4 节点梯度/均匀单元和 8 节点梯度/均匀单元的计算精度基本相同，均与精确解吻合很好。当平行于梯度方向作用温度梯度载荷时，局部热通量和温度场的计算结果与上述情况基本一致，这里略去。

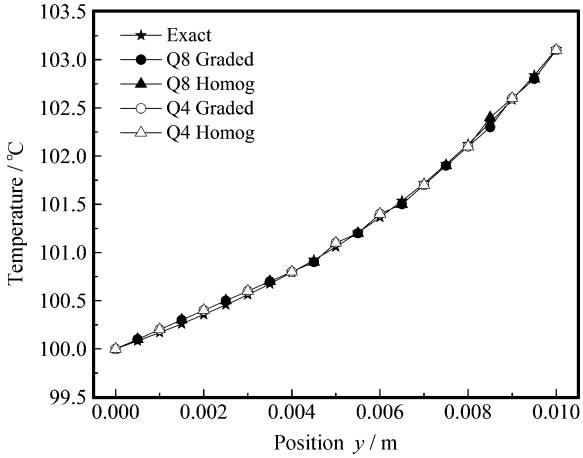

图 10　N=1.0 时 y 方向热流密度载荷作用下(x=0.01 m)ZrO_2/Ti－6Al－4V 梯度板的温度场

Fig. 10　Temperature field of ZrO_2/Ti－6Al－4V graded plate under y-thermal flux load (x=0.01 m) when N=1.0

4 结　论

推导了梯度复合材料板稳态热传导问题的精确解，并提出一种简单高效的热传导梯度有限单元。

（1）当热载荷垂直于材料梯度方向时，温度场沿 x 方向线性分布，x 方向热通量场与导热系数的分布规律相同；热载荷平行于材料梯度时，温度场沿 y 方向非线性分布，y 方向热通量均匀分布。

（2）热载荷垂直于材料梯度方向时，梯度单元能够明显改善局部热通量场的计算精度。材料组分分布形式的变化能够影响均匀单元的计算精度，梯度单元则不受其影响。此外，4 节点梯度单元和 8 节点梯度单元的计算精度基本一致。

（3）热载荷平行于材料梯度方向时，4 节点梯度单元计算得到的局部热通量场出现反常的振荡行为，均匀单元和 8 节点梯度单元可以给出更加精确的结果。

（4）在热流密度载荷和温度梯度载荷作用下，梯度单元和均匀单元计算得到的温度场分布基本一致，均与精确解吻合很好。

参考文献：

[1] Sladek J，Sladek V，Zhang C H. Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method [J]. Computational Materials Science，2003，28(3/4)：494-504.

[2] 陈建桥，丁　亮. 功能梯度材料瞬态热传导问题的 MLPG 方法[J]. 华中科技大学学报：自然科学版，2007，35(4)：119-121.
Chen Jianqiao，Ding Liang. A MLPG method of transient heat transference in FGMs [J]. J Huazhong Univ of Sci & Tech：Nature Science Edition，2007，35(4)：119-121.

[3] Khosravifard A，Hematiyan M R，Marin L. Nonlinear transient heat conduction analysis of functionally graded materials in the presence of heat sources using an improved meshless radial point interpolation method [J]. Applied Mathematical Modelling，2011，35(9)：4157-4174.

[4] Sutradhar A，Paulino G H. The simple boundary element method for transient heat conduction in functionally graded materials [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering，2004，193(42-44)：4511-4539.

[5] Fu Zhuojia，Chen Wen，Qin Qinghua. Boundary knot method for heat conduction in nonlinear functionally graded material [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements，2011，35(5)：729-734.

[6] 许杨健，涂代惠. 对流换热边界下变物性梯度功能材料板瞬态温度场有限元分析 [J]. 复合材料学报，2003，20(2)：94-99.
Xu Yangjian，Tu Daihui. Transient temperature field analysis of functionally gradient material plate with temperature-dependent material properties under convective heat transfer boundary by finite element method [J]. Acta Materiae Compositae Sinica，2003，20(2)：94-99.

[7] Charoensuk J，Vessakosol P. A high order control volume finite element procedure for transient heat conduction analysis of functionally graded materials [J]. Heat Mass Transfer，2010，46(11/12)：1261-1276.

[8] Anlas G，Santare M H，Lambros J. Numerical calculation of stress intensity factors in functionally graded materials [J]. International Journal of Fracture，2000，104(2)：131-143.

[9] 张幸红，李亚辉，韩杰才，王保林. TiC-Ni 系功能梯度材料的断裂力学有限元分析 [J]. 复合材料学报，2001，18(4)：87-92.
Zhang Xinghong，Li Yahui，Han Jiecai，Wang Baolin. Cracking problem analysis of TiC - Ni FGM using finite element method [J]. Acta Materiae Compositae Sinica，2001，18(4)：87-92.

[10] Gu P，Dao M，Asaro R J. A simplified method for calculating the crack tip field of functionally graded materials using the domain integral [J]. Journal of Applied Mechanics，1999，66(1)：101-108.

[11] Ayhan Ali O. Stress intensity factors for three-dimensional cracks in functionally graded materials using enriched finite elements [J]. International Journal of Solids and Structures，2007，44(25/26)：8579-8599.

[12] Kim J H，Paulino G H. Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials [J]. Journal of Applied Mechanics，2002，69(4)：502-514.

[13] Santare M H，Lambros J. Use of graded finite elements to model the behavior of nonhomogeneous materials [J]. Journal of Applied Mechanics，2000，67(4)：819-822.

[14] Chen Biaosong，Tong Liyong. Thermomechanically coupled sensitivity analysis and design optimization of functionally graded materials [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering，2005，194(18-20)：1891-1911.

[15] Nemat-Alla Mahmoud，Ahmed Khaled I E，Hassab-Allah Ibraheem. Elastic - plastic analysis of two - dimensional functionally graded materials under thermal loading [J]. International Journal of Solids and Structures，2009，46(14/15)：2774-2786.