复合材料学报 第22卷 第2期 4月 2005年
Acta Materiae Compositae Sinica Vol. 22 No. 2 April 2005

文章编号: 1000-3851(2005)02-0148-12

复合材料结构受横向载荷作用的强度问题

黄争鸣*, 张若京
(同济大学 航空航天与力学学院 教育部固体力学重点实验室, 上海 200092)

摘 要: 众所周知, 各向同性材料结构的极限分析与设计只需一个应力强度条件(如采用第一或者第四强度理论)。但是在复合材料的情况下, 问题要复杂得多。本文中提出除了一个应力强度条件之外, 还须补充一个临界变形条件或者称为临界刚度条件才可以确定复合材料结构在横向载荷作用下的极限破坏状态的观点。对本文作者近期在这方面的研究工作作了介绍, 尤其侧重介绍如何确定复合材料结构的极限承载能力, 并指出复合材料结构受有横向载荷作用的一些有待研究解决的紧迫问题。

关键词: 复合材料; 横向载荷; 破坏; 强度条件; 形变条件; 极限设计; 最大承载能力
中图分类号: TB 330.1 **文献标识码**: A

ON THE ULTIMATE STRENGTH OF A FIBER REINFORCED COMPOSITE LAMINATE SUBJECTED TO LATERAL LOADS

HUANG Zhengming*, ZHANG Ruojing
(The Key Laboratory of the Ministry of Education, School of Aeronautics, Astronautics & Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: It is well known that design and analysis for the ultimate load carrying capacity of a structure made of isotropic materials can be accomplished only based on a stress failure criterion (e.g. the first or the fourth strength theory introduced in a mechanics of materials text book). This is, however, not true for composites in general. It is pointed out in the paper that the ultimate failure of laminated composite beams subjected to bending cannot be figured out only based on a stress failure criterion. Thus, the design and analysis for the ultimate load carrying capacity of composite structures require not only a stress failure criterion but also a critical deformation related condition. To show this, some experimental evidences are summarized in the paper. Another purpose of this paper is to present some latest results achieved by the authors in the relevant research areas especially in determination of the ultimate bending strength of laminated composites. A number of challenging topics are also addressed in the paper.

Keywords: composite materials; lateral loads; failure; strength condition; critical deflection; ultimate design; maximum load-carrying capacity

纤维增强复合材料因其卓越的比刚度和比强度以及材料性能的可设计特性, 在航空航天、汽车交通、化工能源、建筑桥梁、军工船舰、文体娱乐以及生物工程等领域得到了越来越广泛的应用。复合材料结构多用作为承力件。一般结构件所受的载荷, 主要是横向弯曲力。因此, 了解和掌握纤维增强复合材料结构在横向载荷作用下的力学响应, 正确评估它们的最大承载能力, 对于结构的合理设计与应用具有十分重要的意义。

文献[1～4]对复合材料结构在面内载荷(即薄膜载荷)下的破坏分析与强度理论研究现状进行了评估。指出: 复合材料的强度理论, 并没有很好地建立起来。目前, 还没有一种有限元商用软件包, 可以对复合材料结构进行"自动的"非线弹性结构分析[1](即,带有进行这种结构分析的复合材料库模型)并进而有效地预报其最大承载能力。一个根本原因是: 目前描述复合材料直到破坏时的力学行为, 基本上都是采用线弹性的本构理论[2]。由于复

收稿日期: 2004-04-15; **收修改稿日期**: 2004-06-21
基金项目: 高等学校博士学科点专项科研基金项目(20040247008)
通讯作者: 黄争鸣, 长江学者教授, 博士生导师, 研究方向: 复合材料力学、计算结构力学、纳米纤维材料 E-mail: huangzm@mail.tongji.edu.cn

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

合材料结构通常为叠层结构，层与层之间静不定。要精确确定每一层所分担的载荷，须提供其精确的、当前(瞬时)的刚度系数。当复合材料进入破坏阶段时，某些层一般进入了非线性变形。仅仅基于线弹性刚度，不可能精确确定每一层所分担的载荷，因此，对复合材料结构最大承载能力的预报就会存在误差。

在横向载荷(即弯曲载荷)下复合材料结构的强度分析与最大承载能力的确定，比受面内载荷的情况更为复杂。这是因为弯曲曲率的存在，使得每个材料层所分担的载荷不相同，破坏通常逐层发生。目前对复合材料结构最大弯曲承载能力的研究，开展得还非常有限。绝大部分现有工作，都只侧重于确定第一层破坏所对应的载荷[5~11]。然而，复合材料结构所能承受的最大载荷一般都大大高于其第一层破坏所对应的载荷[9,12]，在受弯曲作用时尤其如此。研究表明：在面内载荷下，复合材料结构的极限破坏层(与最大承载能力相对应的破坏层)一般都出现在最后一层，也就是说，极限破坏层的位置预先已知。然而最近我们发现，当复合材料结构受弯曲载荷作用时，问题变得不一样。其极限破坏，通常既不是发生在第一层、也不是在最后一层，而是出现在某个预先未知的中间层[13,14]。即，最后一层破坏所对应的载荷，比复合材料结构极限破坏时所对应的载荷要小。这样一来，仅仅根据一个应力强度条件，就不可能精确地确定(预报)复合材料结构所能承受的极限弯曲载荷。因为，尽管由应力强度条件可以预报每一层破坏时的载荷值，但预先却无从知晓究竟第几层破坏时所对应的载荷可以取作为复合材料结构的极限载荷。更糟糕的是，由于后一层破坏时的计算载荷值总比前一层破坏时的计算载荷值要高，使得复合材料结构达到极限破坏后的计算载荷值都变得不真实。本文中将详细地阐明这一点，扼要介绍作者在预报复合材料结构极限弯曲承载能力方面的研究结果。其中的理论研究工作基于作者建立的一种十分有效的细观力学理论——桥联模型(Bridging model)[15]，因此，本文作者的另一个目的是对该理论作简单介绍，并指出复合材料结构在受有横向载荷作用时的一些有待研究解决的紧迫问题。

1 实验结果

为了能够清楚地显示弯曲试验后梁内各层的破坏状况，预先将碳纤维分别织成针织布(Knitted fabric)和编织布(Braided fabric)，再与环氧树脂浸胶后做成复合材料弯曲梁试件[13,14]。采用针织布和编织布而不是直接采用单向排列纤维为增强体的一个显著优点是：当除去(采用烧释法或者溶解法)复合材料中的环氧树脂后，余下的纤维层揭开后可依然保持原貌。

1.1 针织复合材料梁的弯曲实验[13]

文献[13]采用简单平织结构为增强体，按图1所示意制备叠层梁试样，共有6层。采用烧释法测得梁试样的纤维体积含量为0.134。拟静态的三点弯曲试验在室温下进行，通过Instron试验机加载到最终破坏。两个不同方向铺层试样的载荷-挠度(加载点的载荷与挠度)典型曲线见图2。结果表明：所有的试样都只在加载截面出现部分破坏，而不是折成两段或多段，参见图3(a)。另外，所有的破坏都是从梁的底部开始并集中在底部一侧，而在梁的顶部则没有破坏的迹象。这说明：针织复合材料梁的弯曲破坏源于最大拉应力。进一步分析表明是因基体的破坏所引起。由于环氧树脂基体的拉伸强度低于其压缩强度，在弯曲载荷下的破坏必然始于受拉一侧。

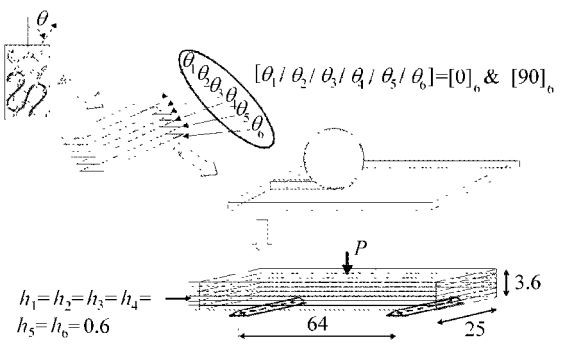

图1 针织复合材料梁试样制备图

Fig.1 Schematic diagram for the fabrication of a laminated composite beam reinforced with knitted fabrics

为弄清是否存在一些材料层在弯曲后根本没有受损，对弯曲后的梁试样采用烧释处理[17]。除去基体材料后，依次取出各个纤维层，展示在图3(b)中。该图清楚地表明：纤维增强复合材料叠层结构受极限弯曲载荷作用时，只有若干层完全或者部分破损，而并非全部层都有破损。这与受面内载荷(如单向拉伸)的情况不一样。在后一种情况下，复合材料的极限破坏一般总对应于最后一层的破坏(试样一般都拉断成两段或多段)，因而极限破坏层

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

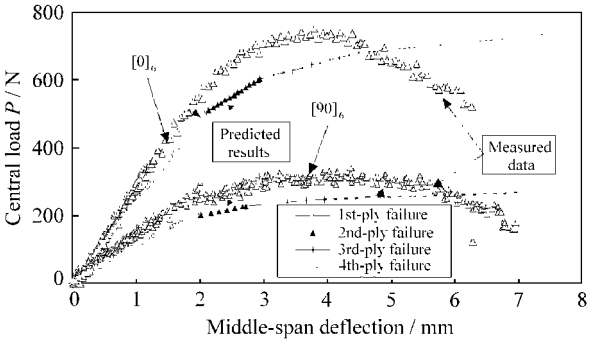

图 2　针织复合材料梁三点弯曲试验与理论值

Fig. 2　Measured and predicted load-deflection curves of knitted fabric composite beams subjected to three-point bending

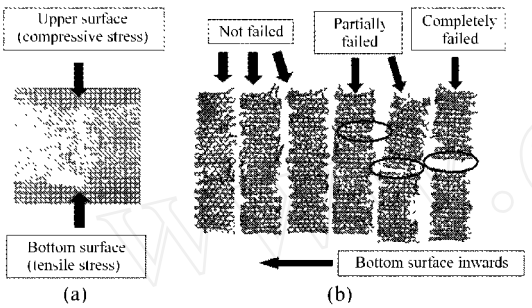

图 3　(a) 针织复合材料梁弯曲破坏截面段; (b) 各层破坏特征

Fig. 3　(a) A failed segment of a knitted fabric composite beam after bending test; (b) Failure status of all the reinforcing fabric layers

的位置预先已知。但在弯曲载荷作用下，复合材料结构极限破坏层的位置预先未知。必须补充一个条件，以表征该极限破坏层的位置。

1.2　编织复合材料梁的弯曲实验[14]

上述针织复合材料中的环状针织线结构，导致纤维的体积含量一般不高，纤维所分担的载荷也远低于其承载能力。因此，针织复合材料梁的破坏发生在底部，由基体的拉伸破坏引起。但所得到的须补充一个临界形变条件才能确定复合材料结构极限弯曲强度的结论是否具有一般性。为此，文献[14]又对编织复合材料梁的四点弯曲特性进行了研究。采用平编织纤维布增强，叠层梁的制备过程参见图 4[14,18]。所得到的梁厚 4.75 mm，纤维体积含量约为 55 %。梁试样的其它尺寸见图 5(a)，典型的载荷-挠度曲线见图 6。结果表明：所有试样也只在加载截面有部分破坏(图 5(b))。然而，编织复合材料梁的弯曲破坏从顶面开始，与针织梁从底部开始(图 3(a))不一样。因此，编织复合材料梁的弯曲破坏源于最大压应力。进一步分析可知，

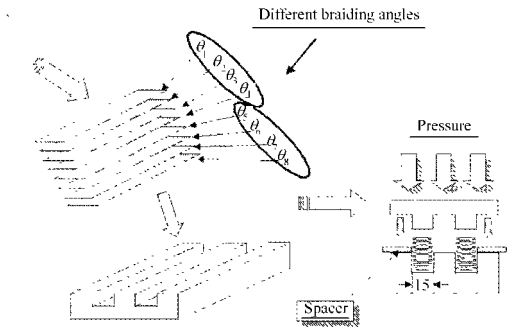

图 4　编织复合材料梁制备示意图

Fig. 4　Schematic diagram for the fabrication of laminated composite beams reinforced with braided fabric

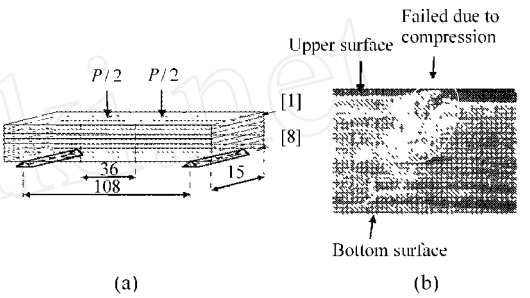

图 5　(a) 编织复合材料梁四点弯曲试验; (b) 弯曲后的载荷截面

Fig. 5　(a) Four-point bending test for a braided composite beam; (b) A failed segment containing one loading section after the test

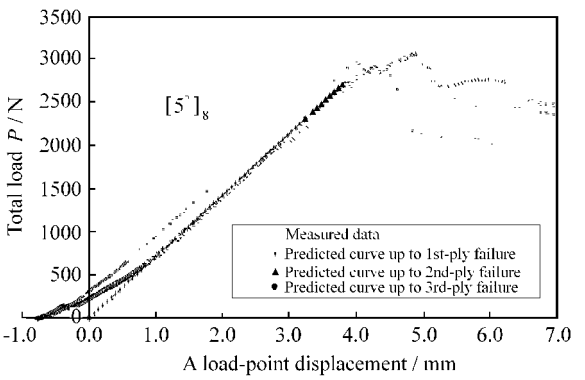

图 6　编织复合材料梁四点弯曲试验与理论值

Fig. 6　Measured and predicted load-deflections of a braided composite beam

这种梁的弯曲破坏由纤维的破坏引起。由于碳纤维的受压强度远低于其受拉强度，在弯曲载荷下的破坏自然是从受压侧开始。

对弯曲后的梁试样经类似的烧释处理后，各纤维层展示在图 7 中。弯曲加载后，编织复合材料梁上顶部的 4 层纤维都完全破损，与其紧邻的另 3 层纤维部分受损，只有底层纤维完好无损。在弯曲过程中，底层纤维总是承受最大拉应力，而与之相邻的纤维层在初始加载阶段承受次最大拉应力。但

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

是，弯曲后的试样仅有底层未受损，甚至与其相邻的纤维层也部分受损。这清楚地表明：复合材料的受损是因纤维的压缩破坏(压断)引起。根据所观察到的实验结果，可以得出以下两个重要结论：

(1) 纤维增强复合材料叠层结构在弯曲载荷下仅部分层破损，进一步验证了针织复合材料梁试验所得到的结论。(2) 弯曲过程中，破损层不再分担载荷，从而导致梁的中性(零应力)轴不断向未破损层迁移。第一个结论表明：复合材料结构的弯曲强度分析和预报，将不仅需要一个应力强度条件而且还需要补充一个临界变形条件。第二个结论则支持理论模拟中的完全刚度衰减。

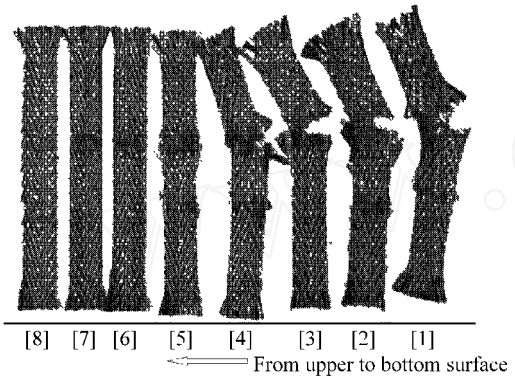

图 7 编织复合材料梁各层弯曲破坏特征

Fig. 7 Failure status of the reinforcing fabric layers for a braided composite beam after the test

2 理论模拟

理论模拟由两部分组成：整体分析与局部分析。大量研究表明：经典层板理论在复合材料结构的整体分析中具有足够的精度，其目的是确定每一层分担的载荷。在此基础上，局部分析得到每一层的当前刚度矩阵并判断该层能否承受所分担的载荷。

2.1 整体分析

假定构成复合材料叠层结构的每一层皆为单向复合材料，见图 8。对于非线性问题，增量求解是一条有效途径。根据经典层板理论，复合材料结构中仅有的平面应力与应变增量是 $\{d\sigma\}^{(G)} = \{d\sigma_{xx}, d\sigma_{yy}, d\sigma_{xy}\}^T$ 和 $\{d\varepsilon\}^{(G)} = \{d\varepsilon_{xx}, d\varepsilon_{yy}, 2d\varepsilon_{xy}\}^T$。取平均后，第 k 层的应力-应变满足：

$$\{d\sigma\}_k^{(G)} = [(C_{ij}^G)_k]\{d\varepsilon\}_k^{(G)}, \tag{1}$$

其中：

$$\{d\varepsilon\}_k^{(G)} = \{d\varepsilon_{xx}^0 + \frac{z_k + z_{k-1}}{2} d\kappa_{xx}^0, d\varepsilon_{yy}^0 + \frac{z_k + z_{k-1}}{2} d\kappa_{yy}^0, 2d\varepsilon_{xy}^0 + (z_k + z_{k-1}) d\kappa_{xy}^0\}^T \tag{2}$$

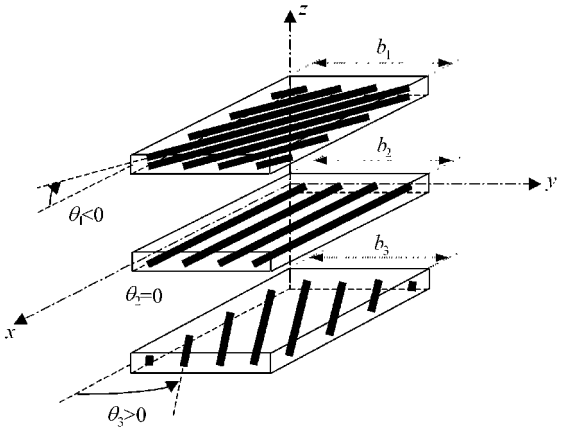

图 8 层板结构示意图

Fig. 8 Schematic diagram for a laminated composite consisting of three unidirectional composite layers

G 表示总体坐标；$[(C_{ij}^G)_k]$ 是该复合材料层在总体坐标系下的当前刚度矩阵。$d\varepsilon_{xx}^0$、$d\varepsilon_{yy}^0$、$d\varepsilon_{xy}^0$ 和 $d\kappa_{xx}^0$、$d\kappa_{yy}^0$、$d\kappa_{xy}^0$ 分别是板中面($z = 0$ 平面)的应变和曲率增量；z_k 和 z_{k-1} 分别是该复合材料层顶面和底面的 z 坐标。(1) 式得到的合力与合力矩须与截面上的内力相等，由此得到[15]：

$$\begin{Bmatrix} dN_{XX} \\ dN_{YY} \\ dN_{XY} \\ dM_{XX} \\ dM_{YY} \\ dM_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{I} & Q_{12}^{I} & Q_{13}^{I} & Q_{11}^{II} & Q_{12}^{II} & Q_{13}^{II} \\ Q_{12}^{I} & Q_{22}^{I} & Q_{23}^{I} & Q_{12}^{II} & Q_{22}^{II} & Q_{23}^{II} \\ Q_{13}^{I} & Q_{23}^{I} & Q_{33}^{I} & Q_{13}^{II} & Q_{23}^{II} & Q_{33}^{II} \\ Q_{11}^{II} & Q_{12}^{II} & Q_{13}^{II} & Q_{11}^{III} & Q_{12}^{III} & Q_{13}^{III} \\ Q_{12}^{II} & Q_{22}^{II} & Q_{23}^{II} & Q_{12}^{III} & Q_{22}^{III} & Q_{23}^{III} \\ Q_{13}^{II} & Q_{23}^{II} & Q_{33}^{II} & Q_{13}^{III} & Q_{23}^{III} & Q_{33}^{III} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{XX}^0 \\ d\varepsilon_{YY}^0 \\ 2d\varepsilon_{XY}^0 \\ d\kappa_{XX}^0 \\ d\kappa_{YY}^0 \\ 2d\kappa_{XY}^0 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

$$Q_{ij}^{I} = \sum_{k=1}^{N} b_k (C_{ij}^G)_k (z_k - z_{k-1}),$$

$$Q_{ij}^{II} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} b_k (C_{ij}^G)_k (z_k^2 - z_{k-1}^2),$$

$$Q_{ij}^{III} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} b_k (C_{ij}^G)_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \tag{4}$$

其中：N 是层数；b_k 是层宽(见图 8)；dN_{XX}、dN_{YY}、dN_{XY} 以及 dM_{XX}、dM_{YY}、dM_{XY} 分别是截面上的总内力与内力矩增量。在分析复合材料板壳结构时，dN_{XX}、dN_{YY}、dN_{XY} 以及 dM_{XX}、dM_{YY}、dM_{XY} 往往取单位宽度上的内力及内力矩增量，这时，只需将(4)中的 b_k 均取 1 就可以了。从(3)式中解出中面内的应变与曲率增量，代入(1)式，求得每一层所分担的载荷。梁的挠度增量(与中面的相等)通过积分以下方程：

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{\partial^2 (\mathrm{d}w^0)}{\partial X^2} = -\mathrm{d}\kappa_{XX}^0 \tag{5}$$

并代入合适的边界条件得到。梁的总挠度则根据 $w_{K+1}^0 = w_K^0 + \mathrm{d}w$ 更新。

2.2　后毁损分析

由于铺排角等不同，每一层所分担的载荷一般都不相等，这在受弯情况下尤其如此。当某个第 k 层毁损后，如前所述，它就不再分担后续载荷，但相对其它层的位置依然保持不变。这等价在平衡方程中(如对轴力和轴向弯矩)，有：

$$\mathrm{d}N_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} b\mathrm{d}\sigma_{xx}\mathrm{d}z = \sum_{\substack{k \\ k\neq k_0}}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} b_k (\mathrm{d}\sigma_{xx})_k \mathrm{d}z$$

和 $$\mathrm{d}M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} b\mathrm{d}\sigma_{xx} z\mathrm{d}z = \sum_{\substack{k \\ k\neq k_0}}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} b_k (\mathrm{d}\sigma_{xx})_k z\mathrm{d}z$$

于是，我们再次得到方程(3)，只不过其刚度矩阵元素不再由(4)式给出，而是衰减为：

$$Q_{ij}^{\mathrm{I}} = \sum_{\substack{k \\ k\notin\{k_0\}}}^{N} b_k (C_{ij}^{\mathrm{G}})_k (z_k - z_{k-1}),$$

$$Q_{ij}^{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{k \\ k\notin\{k_0\}}}^{N} b_k (C_{ij}^{\mathrm{G}})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2),$$

$$Q_{ij}^{\mathrm{III}} = \frac{1}{3}\sum_{\substack{k \\ k\notin\{k_0\}}}^{N} b_k (C_{ij}^{\mathrm{G}})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \tag{6}$$

$\{k_0\}$代表已经发生的毁损层。(6)式给出的刚度衰减称为完全刚度衰减。需要指出的是，现有文献中，更多采用的是部分刚度衰减[19]，比如取 20 %[20]或者 25 %[21]刚度衰减，皆为半经验性的。

2.3　单层分析

很显然，以上分析中最重要的量是单层应力-应变关系(1)式中的刚度矩阵$[(C_{ij}^{\mathrm{G}})_k]$。由于缺少一种有效的非线性本构理论来定义当前刚度，人们通常都代以初始的线弹性刚度替在整个加载过程中保持不变，因而不可避免会产生计算误差[2]。这也成为困扰复合材料力学理论发展的一道难题。然而，由作者提出并发展的一种复合材料细观力学本构理论——桥联模型(Bridging model)[15]，为该问题的解决提供了一条有效途径。

2.3.1　桥联模型

桥联模型的示意图见图 9。当单向复合材料的特征体元(RVE)受到外应力增量$\{\mathrm{d}\sigma\} = \{\mathrm{d}\sigma_{11}, \mathrm{d}\sigma_{22}, \mathrm{d}\sigma_{12}\}^{\mathrm{T}}$作用时，纤维和基体内分别产生有内应力增量$\{\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{f}}\}$和$\{\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{m}}\}$。只要材料没有达到破坏，

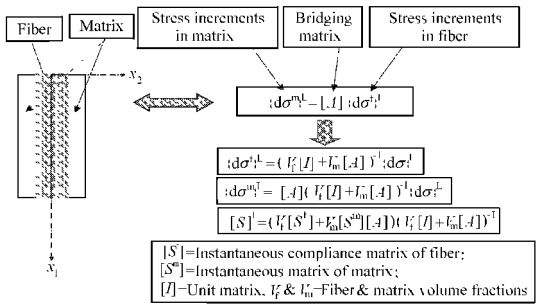

图 9　基于单向复合材料的桥联模型示意图

Fig. 9　Schematic diagram to show the bridging model for a unidirectional composite

$\{\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{f}}\}$和$\{\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{m}}\}$之间就必然存在一个非奇异矩阵相联系，即(参见图 9)：

$$\{\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{m}}\} = [A]\{\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{f}}\} \tag{7}$$

其中：$[A]$称为桥联矩阵(Bridging matrix)，桥联模型亦因此而得。借助于(7)式，复合材料的所有等效力学量都可以从基本方程导出，详见文献[15]。其中最重要的是复合材料的当前刚度矩阵(在局部坐标系下表示)、纤维中的内应力增量以及基体中的内应力增量，分别为：

$$[S] = (V_{\mathrm{f}}[S^{\mathrm{f}}] + V_{\mathrm{m}}[S^{\mathrm{m}}][A])[B] \tag{8}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{d}\sigma_{11}^{\mathrm{f}} \\ \mathrm{d}\sigma_{22}^{\mathrm{f}} \\ \mathrm{d}\sigma_{12}^{\mathrm{f}} \end{Bmatrix} = [B]\begin{Bmatrix} \mathrm{d}\sigma_{11} \\ \mathrm{d}\sigma_{22} \\ \mathrm{d}\sigma_{12} \end{Bmatrix} \tag{9}$$

和 $$\begin{Bmatrix} \mathrm{d}\sigma_{11}^{\mathrm{m}} \\ \mathrm{d}\sigma_{22}^{\mathrm{m}} \\ \mathrm{d}\sigma_{12}^{\mathrm{m}} \end{Bmatrix} = [A][B]\begin{Bmatrix} \mathrm{d}\sigma_{11} \\ \mathrm{d}\sigma_{22} \\ \mathrm{d}\sigma_{12} \end{Bmatrix} \tag{10}$$

V_{f} 和 V_{m} 分别是纤维和基体的体积含量；$[S^{\mathrm{f}}]$和$[S^{\mathrm{m}}]$则是纤维和基体的当前柔度矩阵。对一般线弹性纤维，$[S^{\mathrm{f}}]$由 Hooke 定律定义；对弹-塑性基体，$[S^{\mathrm{m}}]$可由 Prandtl-Reuss 理论确定[15]。$[B] = (V_{\mathrm{f}}[I] + V_{\mathrm{m}}[A])^{-1}$，$[I]$是单位矩阵。桥联矩阵$[A]$以及$[B]$的显式表达式如下(详见文献[15])：

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \text{和} [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \tag{11}$$

其中：$a_{11} = E_{\mathrm{m}}/E_{11}^{\mathrm{f}}$，

$a_{22} = 0.5(1 + E_{\mathrm{m}}/E_{22}^{\mathrm{f}})$，

$a_{33} = 0.5(1 + G_{\mathrm{m}}/G_{12}^{\mathrm{f}})$，

$$E_{\mathrm{m}} = \begin{cases} E^{\mathrm{m}}, \text{当 } \sigma_e^{\mathrm{m}} \le \sigma_Y^{\mathrm{m}} \\ E_{\mathrm{T}}^{\mathrm{m}}, \text{当 } \sigma_e^{\mathrm{m}} > \sigma_Y^{\mathrm{m}} \end{cases},$$

$$G_{\mathrm{m}} = \begin{cases} 0.5E^{\mathrm{m}}/(1+\nu^{\mathrm{m}}), \text{当 } \sigma_e^{\mathrm{m}} \le \sigma_Y^{\mathrm{m}} \\ E_{\mathrm{T}}^{\mathrm{m}}/3, \text{当 } \sigma_e^{\mathrm{m}} > \sigma_Y^{\mathrm{m}} \end{cases},$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\sigma_e^m = \sqrt{(\sigma_{11}^m)^2 + (\sigma_{22}^m)^2 - (\sigma_{11}^m)(\sigma_{22}^m) + 3(\sigma_{12}^m)^2}$$

$$a_{12} = (S_{12}^f - S_{12}^m)(a_{11} - a_{22})/(S_{11}^f - S_{11}^m),$$

$$a_{13} = \frac{d_2\beta_{11} - d_1\beta_{21}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}},$$

$$a_{23} = \frac{d_1\beta_{22} - d_2\beta_{12}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}},$$

$$b_{11} = (V_f + V_m a_{22})(V_f + V_m a_{33})/c,$$

$$b_{12} = -(V_m a_{12})(V_f + V_m a_{33})/c,$$

$$b_{13} = [(V_m a_{12})(V_m a_{23}) - (V_f + V_m a_{22})(V_m a_{13})]/c,$$

$$b_{22} = (V_f + V_m a_{11})(V_f + V_m a_{33})/c,$$

$$b_{23} = -(V_m a_{23})(V_f + V_m a_{11})/c,$$

$$b_{33} = (V_f + V_m a_{22})(V_f + V_m a_{11})/c,$$

$$c = (V_f + V_m a_{11})(V_f + V_m a_{22})(V_f + V_m a_{33}).$$

$$d_1 = S_{13}^m(a_{11} - a_{33}),$$

$$d_2 = S_{23}^m(V_f + V_m a_{11})(a_{22} - a_{33}) + S_{13}^m(V_f + V_m a_{33})a_{12},$$

$$\beta_{11} = S_{12}^m - S_{12}^f, \beta_{12} = S_{11}^m - S_{11}^f,$$

$$\beta_{22} = (V_f + V_m a_{22})(S_{12}^m - S_{12}^f),$$

$$\beta_{21} = V_m(S_{12}^f - S_{12}^m)a_{12} - (V_f + V_m a_{11})(S_{22}^f - S_{22}^m)$$

E_{11}^f、E_{22}^f 和 G_{12}^f 分别是纤维的轴向模量、横向模量和面内剪切模量；E^m、G^m 和 ν^m 是基体的弹性模量、剪切模量和泊松比；σ_Y^m 和 E_T^m 则是基体的屈服极限与硬化模量(见图 10)；S_{ij}^f 和 S_{ij}^m 是纤维与基体的当前柔度矩阵元素。

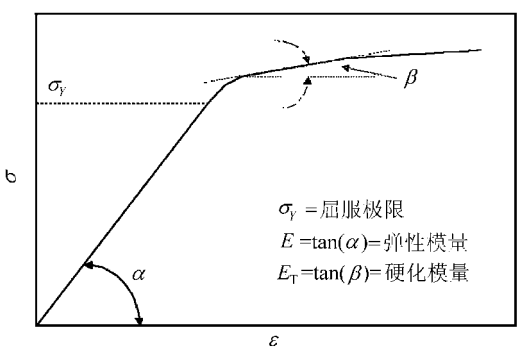

图 10 弹塑性应力-应变曲线及其参数定义

Fig. 10 Typical stress-strain curve of an elasto-plastic material with parameter definitions

2.3.2 破坏准则

纤维和基体中的总应力按以下简单公式更新：

$$\{\sigma^f\}^{(K+1)} = \{\sigma^f\}^{(K)} + \{d\sigma^f\}$$

$$和\{\sigma^m\}^{(K+1)} = \{\sigma^m\}^{(K)} + \{d\sigma^m\},$$

$$K = 0, 1, \cdots \tag{12}$$

若不计热残余应力(如复合材料在室温或接近室温下制备)，初始$\{\sigma^f\}^{(0)}$和$\{\sigma^m\}^{(0)}$均取为 0。不然，需要应用文献[21]提供的方法计算热残余应力。由于两个组成材料中的应力都已知，就可以通过检测纤维和基体的破坏与否来判断复合材料是否破坏。采用第一强度理论检测组成材料的破坏，那么，只要以下 4 个条件中的任何一个得到满足，就认为复合材料达到了破坏。

$$\frac{\sigma_{11}^f + \sigma_{22}^f}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11}^f - \sigma_{22}^f)^2 + 4(\sigma_{12}^f)^2} \geq \sigma_u^f \tag{13.1}$$

$$\frac{\sigma_{11}^f + \sigma_{22}^f}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11}^f - \sigma_{22}^f)^2 + 4(\sigma_{12}^f)^2} \leq -\sigma_{u,c}^f \tag{13.2}$$

$$\frac{\sigma_{11}^m + \sigma_{22}^m}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11}^m - \sigma_{22}^m)^2 + 4(\sigma_{12}^m)^2} \geq \sigma_u^m \tag{13.3}$$

$$\frac{\sigma_{11}^m + \sigma_{22}^m}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11}^m - \sigma_{22}^m)^2 + 4(\sigma_{12}^m)^2} \leq -\sigma_{u,c}^m \tag{13.4}$$

其中：σ_u^f、$\sigma_{u,c}^f$和σ_u^m、$\sigma_{u,c}^m$分别是纤维和基体的拉强度、压强度。采用这种细观力学(即，针对组成材料)的破坏判据与常用的宏观力学破坏判据(如 Tsai-Wu 理论)相比具有两个突出优点：(1) 仅仅只需对纤维和基体做一次简单实验测定它们的材料参数，而无需对相同纤维和基体做成的不同复合材料进行重复制样和试验，可大大节省时间和经费并便于应用。(2) 可在加工制备前实现对复合材料细观量级的强度优化，达到设计材料之目的。

2.3.3 坐标变换

上述桥联模型公式都是在单向复合材料的局部坐标系下导出的，而整体分析相对总体坐标进行，必须在这两个坐标系之间进行变换，参见图 11。首先，我们有：

$$[(C_{ij}^G)_k] = ([T]_c)_k([S]_k)^{-1}([T]_c^T)_k \tag{14}$$

其中：$[T]_c = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & 2l_1l_2 \\ m_1^2 & m_2^2 & 2m_1m_2 \\ l_1m_1 & l_2m_2 & l_1m_2 + l_2m_1 \end{bmatrix}$，

$$l_1 = m_2 = \cos\theta, l_2 = -m_1 = \sin\theta \tag{15}$$

其次，根据(1)式得到的总体坐标下的应力增量须变换到局部坐标下后，方可代入(9)式和(10)式的右端计算纤维和基体中的内应力增量。其变换公式为：

$$\{d\sigma\}_k = ([T]_s^T)_k\{d\sigma\}_k^{(G)} \tag{16}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

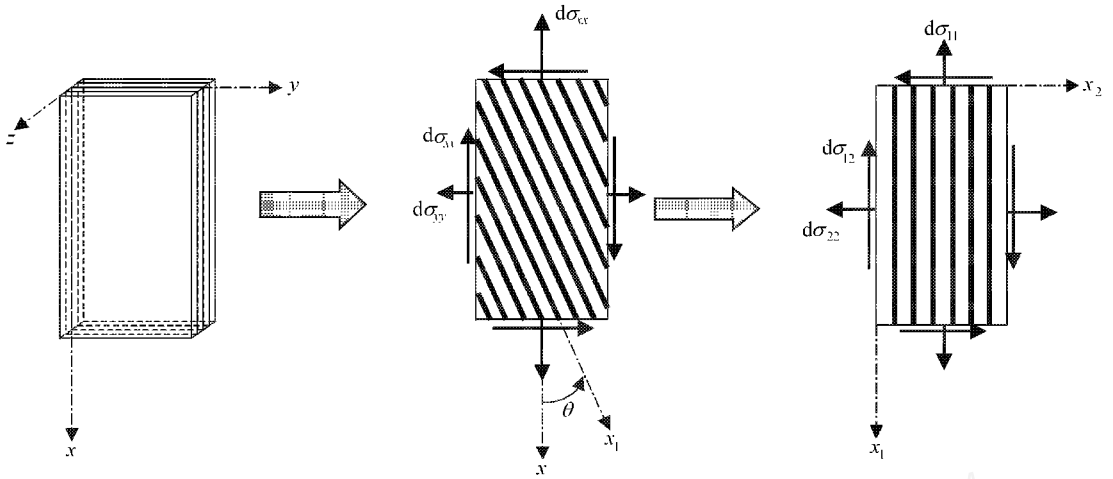

图 11　局部与整体坐标系之间的坐标变换

Fig. 11　Coordinate transformation between the global and local coordinates for a lamina layer in a laminated composite

$$[T]_s = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_1 l_2 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_1 m_2 \\ 2 l_1 m_1 & 2 l_2 m_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

2.4　临界刚度条件

如前所述，必须补充一个临界刚度条件才能确定复合材料结构的极限弯曲应力。在本文作者的研究中，临界刚度条件取为复合材料梁的临界挠度，就是弯曲试验载荷-挠度曲线上对应最大载荷点的挠度值。

3　模拟结果

3.1　实心复合材料圆杆受三点弯曲

实心或空心复合材料杆结构在实际中十分普遍，如用作为传动轴、卫星珊、网球拍、高尔夫球杆、矫齿线等，主要承受弯曲载荷作用。了解它们在弯曲载荷下的极限承载能力非常必要。这里考虑的是口腔外科用的复合材料矫齿线[23~25]。文献[26]中采用了一种管缩制备法，所得到的矫齿线直径为 0.5mm，纤维体积含量为 45 %[26]。三点弯曲的中点载荷-挠度曲线见图 12。模拟计算如下。

3.1.1　轴向离散

不难预料，弯曲载荷下复合材料杆的破坏与叠层梁有类似特征。即，极限破坏并非出现在受初始最大弯曲应力的杆表面纤维，而是深入其内。为找到发生极限破坏的纤维位置，假想将复合材料杆沿轴向离散成若干平行的单向复合材料层，如图 13 所示。假定为 $N = 2n$ 层，每层厚度 t 为：

$$t = d/N = d/(2n) \quad (18)$$

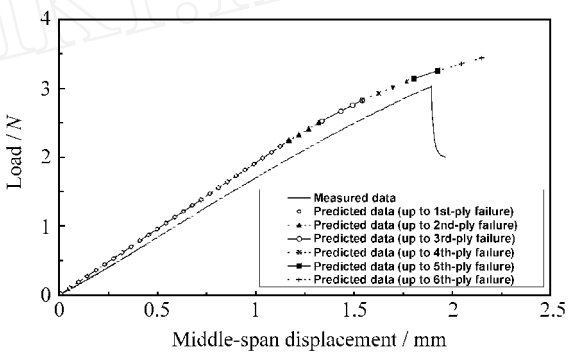

图 12　复合材料杆载荷-挠度曲线：实验值与理论值对比

Fig. 12　Comparison between measured and predicted load-deflection curves of a composite cylinder

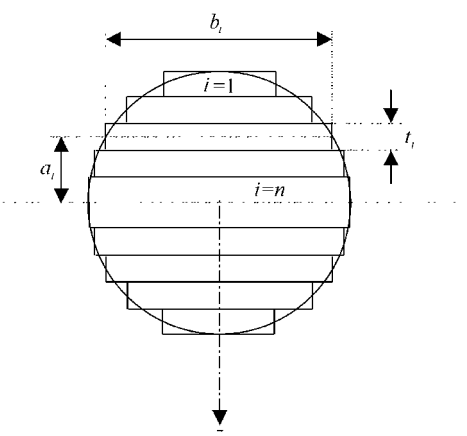

图 13　复合材料杆横截面离散

Fig. 13　Schematic discretization for the cross-section of a composite cylinder

其中：d 是杆的直径。第 i 层的宽度 b_i 则由以下公式确定：

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$b_i = \sqrt{d^2 - 4a_i^2} = \sqrt{d^2 - 4[(n-i)t + 0.5t]^2},$$
$$i = 1, \cdots, n \tag{19}$$

注意，本问题中的总体坐标与各层局部坐标重合，即在坐标变换公式(15)中 θ 取为 0。

3.1.2 计算结果

本例中的玻璃纤维看作为各向同性线弹性体，其性能取自文献[27]并列于表 1 中。基体(环氧树脂)的性能则经实验[26]确定，参见表 2。以表 1 和表 2 的数据、直径 $d = 0.5$ mm 以及纤维体积含量 $V_f = 0.45$ 为输入参数，对复合材料杆的极限响应进行了数值模拟，结果示于图 12 中。如前所述，模拟过程中杆被离散为 16 层，但只模拟计算了直到第 6 层破坏时的载荷-挠度响应。这是因为第 5 层破坏所对应的杆的挠度都已超过了临界挠度实验值，参见图 12。这表明：在离散为 16 层的情况下，第 5 层破坏对应于极限破坏。此时的载荷就是梁所能承受的极限载荷。比较图 12 中的结果可见，理论计算与试验数据相当吻合。进一步分析表明[26]：弯曲刚度和弯曲强度的理论值与试验值的误差皆在 10 %之内，说明了理论方法的有效性。

表 1 E 型玻璃纤维力学性能[27]

Table 1 Mechanical properties of an E-glass fiber

E_{11}^f/ GPa	ν_{12}^f	E_{22}^f/ GPa	G_{12}^f/ GPa	ν_{23}^f	σ_u^f/ MPa	$\sigma_{u,c}^f$/ MPa
74	0.2	74	30.8	0.2	2093	1312

表 2 环氧树脂 R50 弯曲载荷下的材料参数

Table 2 Mechanical properties of epoxy resin, R50, under a bending test($\nu^m = 0.414$)

	Tensile properties (strength = 67.8 MPa)				Compressive properties (strength = 87.8 MPa)			
i	1	2	3	4	1	2	3	4
$(\sigma_Y^m)_i$/ MPa	28.8	48.9	63.4	67.8	35.8	52.9	68.4	87.8
$(E_T^m)_i$/ GPa	2.98	2.48	1.45	0.56	3.31	2.73	1.72	0.66

Note: $E_m = (E_T^m)_i$, when $(\sigma_Y^m)_{i-1} \le \sigma_e^m \le (\sigma_Y^m)_i$, with $(\sigma_Y^m)_0 = 0$, $E^m = (E_T^m)_1$; $E_m \equiv (E_T^m)_4$, when $\sigma_e^m \ge (\sigma_Y^m)_4$.

3.2 针织复合材料梁的弯曲强度

复杂纤维结构如针织结构增强复合材料叠层梁的分析，原则上与单向纤维结构增强复合材料叠层梁的分析类似。即，先根据经典层板理论和每一层在总体坐标系下的当前刚度，求出各层所分担的载荷。然后，再对每一层进行局部分析，得到修正的刚度矩阵以及该层中纤维和基体内的当前应力。局部分析的最终实现也须借助于桥联模型，关键是将复杂的针织复合材料分解成一系列单向复合材料的组合。这里，仅对分析步骤作简单介绍，详细过程见有关文献。

图 14(a)为平针织复合材料梁受三点弯曲，其制备及铺排见图 1。对针织复合材料梁的分析尤其须注意不同坐标系之间的变换。结构的总体坐标用 (X, Y, Z) 表示。应用增量求解并根据经典的层板理论及每一层的当前刚度，求出该层在总体坐标系下所分担的应力增量，见图 14(b)。再经坐标变换转变到面内坐标系 (x, y, z) 表达，如图 14(c)。

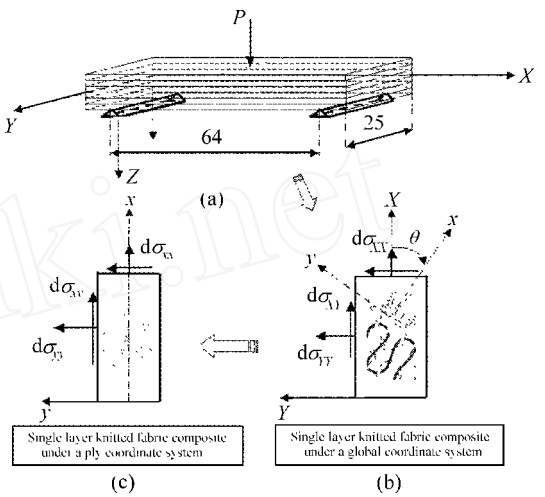

图 14 针织纤维结构增强复合材料叠层梁整体分析

Fig. 14 Schematic diagram to show global analysis for a knitted composite laminate beam

单层针织复合材料所分担的应力确定后，须对该层进行层内分析，见示意图 15。根据针织纤维结构(图 15(a))的特点，它可以分解成由一个个如图 15(b)所示的单胞(Unit cell)组成。每个单胞，又可以划分成 4 个相同或对称的子胞。取其中一个子胞作为平针织复合材料的特征体元(即 RVE)。特征体元内含有两根纤维束，见图 15(c)。纤维束在面内坐标系 (x, y, z) 下的几何位置可由 Leaf 和 Glaskin 解析公式描述(见文献[29])。进一步，将特征体元沿 x 方向用两个彼此平行的平面细分(图 15(c))。平面间所夹的纤维段可以近似地当作为直线段。这样，细分后的单根纤维束与所围的基体可看作为一个斜排的单向复合材料(图 15(d))。对该复合材料在局部坐标系 (x_1, x_2, x_3) 下应用桥联模型，求出当前刚度矩阵、纤维中应力增量以及基体中的应力增量，再经与离散过程相仿但相反的叠加，得到单层针织复合材料在总体坐标系下的响应(即，当前刚度矩阵、纤维中应力增量、基体中应力增量)。0 和 90 排列的数值计算结果示于图 2 中，其

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

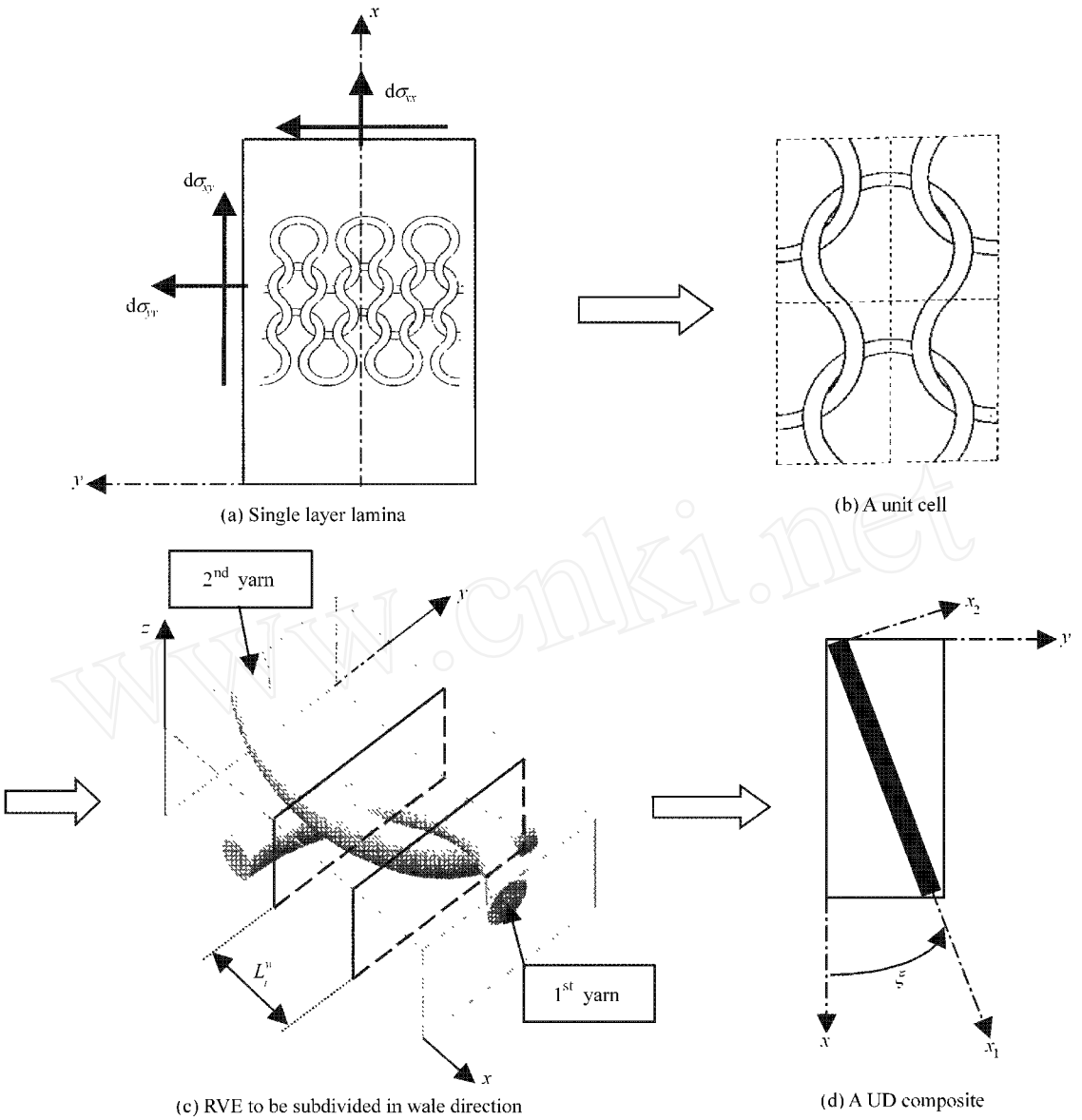

图 15　单层针织纤维结构增强复合材料分析示意图

Fig. 15　Schematic diagram to show analysis for a single layer knitted fabric composite

余见文献[16]。从图中看出，理论模拟与实验结果吻合较好。结果还显示，梁的第 3 层破坏对应于极限破坏。所有层的破坏都是由基体的拉伸断裂所引起的，与试验观察的相一致。

3.3　编织复合材料梁的弯曲强度

编织复合材料叠层梁的理论分析由图 16 和图 17 示意。图 16 给出整体分析，图 17 代表单层分析。整体分析与前述类似，基于经典的层板理论和每一层在总体坐标系下的当前刚度。所不同的是层内分析。从编织纤维布的结构特点(图 17(a))看到，它可以当作为一系列图 17(b)所示的单胞构成。每个单胞有 4 个子胞，结构完全一样。当把子胞浸入基体后，对应的几何体取作为编织纤维结构增强复合材料的特征体元(RVE)。对该特征体元进行面内离散，类似于结构分析中的有限元离散，见图 17(c)。每个离散的子单元在厚度方向上最多可能有 4 个材料层，如图 17(d)所示。顶层和底层为纯基体材料(对某些子单元而言，这两层的厚度有可能为 0)，中间的两层为沿不同方向编织的纤维束，分别称为纤维束 1 和纤维束 2。

文献[30]详细导出了这两个纤维束的几何坐标。需要指出的是，如果两编织纤维束的交叉处存在间隙，那么，某些子单元的中间两层可能都不存在，也可能只有其中一层存在，参见文献[30]。另

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

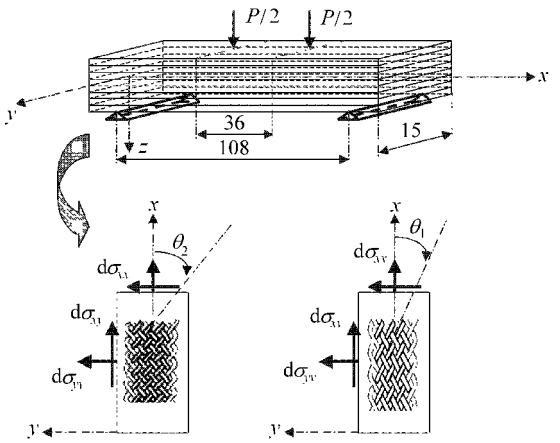

图 16　编织纤维结构增强复合材料叠层梁整体分析

Fig. 16　Schematic diagram to show global analysis for a braided composite laminate beam

外还须指出的是：浸胶后的纤维束 1 和纤维束 2 内都含有基体材料，而不是百分之百的纤维成分，虽然这些纤维束内的纤维体积含量一般较高(高于编织复合材料梁的整体纤维体积含量，这是因为在某些子单元内有纯基体材料层)。因此，在各自的局部坐标系内，纤维束 1 和纤维束 2 均可以视为单向复合材料(图 17(e)、图 17(f))。纯基体材料则是一种特殊形式的单向复合材料(其内的纤维体积含量为 0)，见图 17(g)。对这些单向复合材料应用桥联模型求解，再按与离散过程相反的步骤叠加，就得到每一层编织复合材料的当前刚度、纤维与基体中的应力增量。详细求解过程见文献[30]。图 6 给出了由编织角为 5°的纤维布增强复合材料梁受 4 点弯曲的理论值与试验结果对比，两者数据十分接近。对其它编织布增强复合材料梁的弯曲强度模拟结果，可见文献[18]。

4　讨　论

复合材料结构的极限承载能力是结构强度设计的关键数据。由于复合材料的各向异性性能，沿不同方向其极限强度值不一样；而且，单向加载与组合加载下的极限强度一般不同。因此，完全通过实验来确定所有这些强度值几乎不可能，并且代价极高。这就迫切需要发展评估复合材料结构极限强度的有效方法。遗憾的是，目前有关这方面的绝大部分工作都局限于面内载荷作用的情况。正如本文中所揭示的，复合材料结构受弯曲载荷与受面内载荷的极限强度评估方法不一样。实际中的结构件大都不可避免甚至是主要地受到横向力作用，这就使得对含有横向弯曲载荷作用的复合材料结构极限承载能力的评估更具现实意义。本文中简要介绍了作者与其合作者的最近研究成果。很显然，本文中介绍的工作仅仅只是一个开端，还有许多问题有待研究解决。事实上，目前我们只是明确认识到：仅仅靠

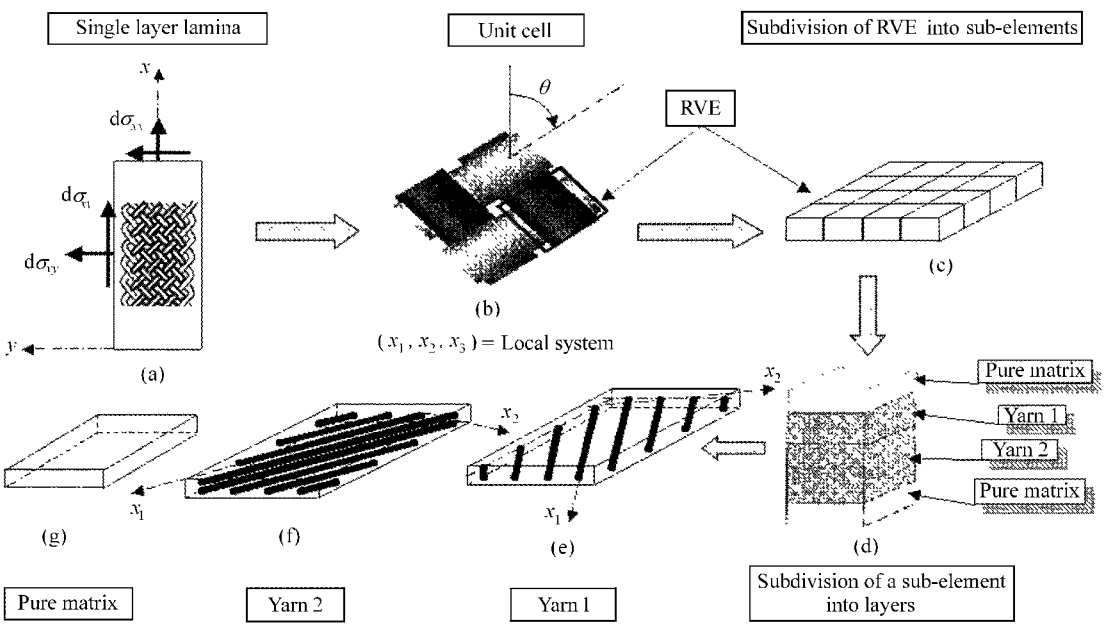

图 17　单层编织纤维结构增强复合材料分析示意图

Fig. 17　Schematic diagram to show analysis for a single layer braided fabric composite

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

一个应力强度条件还不足以确定复合材料结构的极限弯曲强度，还须额外补充一个(只可能与形变有关的)临界条件。以下是一些重要问题：

(1) 如何定义临界刚度条件？根据简单梁的弯曲破坏试验，我们可以得到，如：(a) 临界挠度(本文作者采用)；(b) 临界曲率；(c) 破坏层数。究竟哪个参数或者其它另外的参数可以适合于用作为一般情况下的临界刚度条件？乍一看，似乎临界曲率条件最为合适。但我们对前述复合材料矫齿线杆离散后，分别应用经典的层板理论和梁理论进行了结构分析[31]。虽然两种理论计算出的载荷-挠度曲线以及极限承载能力都相差不大，但极限破坏时两种理论所计算出的曲率则有很大差别(参见图18)。这表明：采用临界曲率条件似乎缺乏一致性，因而也许并不恰当。可是，采用临界挠度作为临界刚度条件所面临的问题是：复合材料结构在弯曲与面内拉伸以及弯曲与面内压缩组合作用下产生极限破坏时所对应的挠度可能不一样。是否破坏层数能作为临界刚度条件？还有待进一步研究回答。

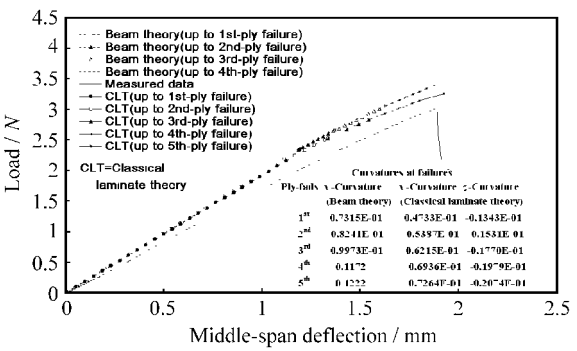

图 18　基于不同理论得到的复合材料杆的载荷-挠度曲线

Fig. 18　Comparison of predicted load-deflection curves based on different theories with measured one for a composite cylinder

(2) 如何确定面内与弯曲组合载荷下极限破坏的临界变形(刚度)条件？如前所述，面内载荷作用下的极限破坏一般对应于最后一层破坏，而横向载荷作用下的极限破坏则对应于某个中间层的破坏。那么，在不同的面内与弯曲组合载荷作用下的极限破坏又如何确定呢？能否只需经一次简单梁的弯曲试验或者某种载荷组合试验，就可以定出控制不同的面内与横向组合载荷下极限破坏的临界变形(刚度)条件？

(3) 能否根据简单梁试验得到的临界刚度条件来预测板壳等复合材料复杂结构的极限破坏？换言之，是否复合材料结构极限破坏所发生的层与结构的几何尺寸、边界条件等无关

(4) 静载与冲击等动载条件下的临界刚度条件是否相同？

5　结　论

在弯曲载荷作用下，复合材料结构与最大承载能力相对应的极限破坏一般既不发生在第一层、也不发生在最后一层，而是出现在某个中间层。为了确定这个中间层的位置，需要另外补充一个控制参数。在简单梁受弯曲载荷作用的情况下，本文中用梁的临界挠度作为该控制参数。文中介绍了对 3 种不同纤维结构增强复合材料梁最大弯曲强度的模拟结果，理论预报值与实验测试值都吻合得相当好。进一步的研究应该侧重于如何评估或者预报复合材料结构在各种不同面内与横向力组合作用下的最大强度。

参考文献：

[1] Hinton M J, Soden P D. Predicting failure in composite laminates: The background to the exercise [J]. *Comp Sci & Tech*, 1998, 58: 1001 - 1010.

[2] Soden P D, Hinton M J, Kaddour A S. A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates [J]. *Comp Sci & Tech*, 1998, 58: 1225 - 1254.

[3] Hinton M J, Kaddour A S, Soden P D. A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates, judged against experimental evidence [J]. *Comp Sci & Tech*, 2002, 62(12 - 13): 1725 - 1797.

[4] Hinton M J, Kaddour A S, Soden P D. A further assessment of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates: Comparison with experimental evidence [J]. *Comp Sci & Tech*, 2004, 64(3 - 4): 549 - 588.

[5] Whitney J M, Browning C E, Mair A. Analysis of the flexure test for laminated composite materials [A]. In: Composite Materials: Testing and Design, ASTM STP 546 [C]. American Society for Testing and Materials, 1974. 30 - 45.

[6] Turvey G J. Uniformly loaded, antisymmetric cross-ply laminated, rectangular plates: An initial flexural failure analysis [J]. *Fiber Sci & Tech*, 1982, 16: 1 - 10.

[7] Dvorak G J, Laws N. Analysis of progressive matrix cracking in composite laminates Ⅱ: First ply failure [J]. *J Comp Mater*, 1987, 21: 309 - 329.

[8] Kam T Y, Sher H F. Nonlinear and first-ply failure analyses of laminated composite cross-ply plates [J]. *J Comp Mater*, 1995, 29: 463 - 482.

[9] Greif R, Chapon E. Investigation of successive failure modes in graphite/epoxy laminated composite beams [J]. *J Reinf*

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Plas & Comp, 1993, 12: 602 - 621.

[10] Echaabi J, Trochu F, Pham X T, *et al*. Theoretical and experimental investigation of failure and damage progression of graphite-epoxy composites in flexural bending test [J]. *J Reinf Plas & Comp*, 1996, 15: 740 - 755.

[11] Smith P A, Ogin S L. On transverse matrix cracking in cross-ply laminates loaded in simple bending [J]. *Composites: Part A*, 1999, 30: 1003 - 1008.

[12] Spottswood S M, Palazotto A N. Progressive failure analysis of a composite shell [J]. *Composite Structures*, 2001, 53: 117 - 131.

[13] Huang Z M, Teng X C, Ramakrishna S. Bending behavior of laminated knitted fabric reinforced beams [J]. *Advanced Composites Letters*, 2001, 10(5): 211 - 218.

[14] Huang Z M, Fujihara K, Ramakrishna S. Bending failure characterization of laminated beams with braided fabric reinforcement [J]. *Advanced Composites Letters*, 2003, 12(3): 85 - 96.

[15] Huang Z M. Simulation of the mechanical properties of fibrous composites by the bridging micromechanics model [J]. *Composites Part A*, 2001, 32(2): 143 - 172.

[16] Huang Z M, Teng X C, Ramakrishna S. Progressive failure analysis of laminated knitted fabric composites under bending [J]. *J of Thermoplastic Composite Materials*, 2001, 14(6): 499 - 522.

[17] Zhang Y Z, Huang Z M, Ramakrishna S. Tensile behavior of multilayer knitted fabric composites with different stacking configuration [J]. *Applied Composite Materials, An International Journal for the Science & Application of Composite Materials*, 2001, 8(4): 279 - 295.

[18] Huang Z M. Modeling and characterization of bending strength of braided fabric reinforced laminates [J]. *J of Composite Mater*, 2002, 36(22): 2537 - 2566.

[19] Padhi G S, Shenoi R A, Moy S S J, *et al*. Progressive failure and ultimate collapse of laminated composite plates in bending [J]. *Composite Structures*, 1998, 40: 277 - 291.

[20] Reddy J N, Pandey J N. A first-ply failure analysis of composite laminates [J]. *Composite Structures*, 1987, 25: 371 - 393.

[21] Huang Z M. Modeling strength of multidirectional laminates under thermo-mechanical loads [J]. *J Comp Mater*, 2001, 35(4): 281 - 315.

[22] Adams D F. Elastoplastic behavior of composites [A]. In: Sendeckyj G P, ed. Mechanics of Composite Materials [M]. New York: Academic Press, 1974. 169 - 208.

[23] Watari F, Yamagata S, Imai T, *et al*. The fabrication and properties of aesthetic FRP wires for use in orthodontics [J]. *J Mater Sci*, 1998, 33: 5661 - 5664.

[24] Toyoizumi H, Watari F, Imai T, *et al*. Fabrication of aesthetic wires with flexural and torsional stiffness by photo curing method [J]. *The Journal of the Japanese Society for Dental Materials and Devices*, 1999, 18(6): 429 - 440.

[25] Fallis D W, Kusy R P. Variation in flexural properties of photo-pultruded composite archwires: Analyses of round and rectangular profiles [J]. *J Mater Sci Mater Med*, 2000, 11: 683 - 693.

[26] Huang Z M, Gopal R, Fujihara K, *et al*. Fabrication of a new composite orthodontic archwire and validation by a bridging micromechanics model [J]. *Biomaterials*, 2003, 24(17): 2941 - 2953.

[27] Soden P D, Hinton M J, Kaddour A S. Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fiber-reinforced composite laminates [J]. *Comp Sci & Tech*, 1998, 58: 1011 - 1022.

[28] Huang Z M. Micromechanical strength formulae of unidirectional composites [J]. *Materials Letters*, 1999, 40(4): 164 - 169.

[29] Huang Z M, Ramakrishna S, Tay A A O. A micromechanical approach to the tensile strength of a knitted fabric composite [J]. *J of Comp Mater*, 1999, 33(19): 1758 - 1791.

[30] Huang Z M. The mechanical properties of composites reinforced with woven and braided fabrics [J]. *Comp Sci & Tech*, 2000, 60: 479 - 498.

[31] Huang Z M. Ultimate strength of a composite cylinder subjected to three-point bending: Correlation of beam theory with experiment [J]. *Composite Structures*, 2004, 63: 439 - 445.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net