复合材料学报 第22卷 第3期 6月 2005年
Acta Materiae Compositae Sinica Vol. 22 No. 3 June 2005

文章编号: 1000-3851(2005)03-0156-06

二维正交各向异性结构弹塑性问题的边界元分析

孙秀山[1], 黄立新[2], 刘应华[3], 岑章志[3,*], 方东平[1]

(1. 清华大学 土木工程系, 北京 100084;
2. 广西大学 土木建筑工程学院, 南宁 530004;
3. 清华大学 工程力学系, 北京 100084)

摘 要: 给出了二维正交各向异性结构弹塑性问题的边界元分析方法, 包括相应边界积分方程、内点应力公式、边界元求解格式以及弹塑性应力计算方法。在弹塑性分析中, 引入了 Hill-Tsai 屈服准则, 采用初应力法和切向预测径向返回法确定实际应力状态。通过具体算例分析了二维正交各向异性结构的弹塑性应力和塑性区分布情况, 部分数值结果与已有结果进行了比较, 两者基本吻合。结果表明, 本文中给出的边界元法可以有效地用于求解二维正交各向异性结构的弹塑性问题。

关键词: 二维正交各向异性结构; 弹塑性问题; 边界元法
中图分类号: TB330.1; O302 **文献标识码**: A

BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS FOR ELASTO-PLASTIC PROBLEM OF 2-D ORTHOTROPIC STRUCTURES

SUN Xiushan[1], HUANG Lixin[2], LIU Yinghua[3], CEN Zhangzhi[3,*], FANG Dongping[1]

(1. Department of Civil Engineering, 3. Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China;
2. College of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: The boundary element method (BEM) is proposed to analyze the elasto-plastic problems of 2-D orthotropic structures. The boundary integral equation, internal stress expression, BEM analysis formulae and elasto-plastic stress computation were established, respectively. In the elasto-plastic analysis, Hill-Tsai yielding criterion was adopted, and the initial stress method and tangent predictor-radial return algorithm were used to determine the real stress state. The elasto-plastic stresses and plastic zones of 2-D orthotropic structures were analyzed with the proposed method, and some numerical results were compared with the existing ones. Good agreement was observed, which demonstrates the validity of the present BEM in elaso-plastic problems of 2-D orthotropic structures.

Keywords: 2-D orthotropic structure; elasto-plastic problem; boundary element method (BEM)

近年来, 一些呈现正交各向异性的结构在实际工程中应用越来越广泛, 其中有些结构在外载荷的作用下会发生一定的塑性变形, 因此, 对这些结构进行诸如弹塑性分析等力学性能上的研究有着重要的理论和实际意义[1]。但一般的正交各向异性弹塑性问题都比较复杂, 通过解析方法寻求相应问题的解往往是不可能也是不现实的, 而且有关实验也非常缺乏, 所以有必要发展相关数值求解方法。

有关各向异性结构的弹性理论在二十世纪中叶已经比较成熟[2], 后来随着电子计算机技术的发展, 比较复杂的正交各向异性弹性力学问题可以借助于诸如有限元和边界元等数值方法得以解决[3,4]。但对于正交各向异性结构的弹塑性问题, 无论是理论研究还是相关数值分析方法, 目前有关研究与弹性问题相比都比较少。Hill[5] 早在 1948 年就给出了一个正交各向异性屈服准则, 即著名的 Hill 准则。Hill 准则是各向同性问题的 von Mises 屈服准则在各向异性问题中的推广。尽管有关各向异性弹塑性问题的理论出现较早, 但由于这一问题的复杂性, 直到二十世纪六十年代末诸如有限元等

收稿日期: 2004-07-05; **收修改稿日期**: 2004-10-18
基金项目: 国家自然科学基金(19902007); 全国优秀博士论文基金(200025)
通讯作者: 岑章志, 教授, 主要从事计算固体力学研究 E-mail: demczz@tsinghua.edu.cn

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

数值方法逐渐成熟的时候，有关各向异性结构弹塑性问题才得以借助数值方法寻求解决。Whang[6]于1969年首先提出了正交各向异性结构弹塑性问题的有限元法，其中弹塑性本构关系采用了应变硬化模型，但这一模型只能处理微弱各向异性问题。Owen和Figueiras[7]于1983年利用Whang提出的这一有限元模型分析了各向异性薄板和薄壳的弹塑性问题。近年来，也有一些研究者根据Hill准则及一定的假设条件，利用解析的方法分析了诸如梁弯曲等比较简单的正交各向异性平面弹塑性问题。例如，Karakuzu和Ozcan[8]在1996年利用解析法分析了正交各向异性铝基复合悬臂梁分别承受端部集中载荷和表面均匀载荷两种情况下的弹塑性问题，其中假设在加载方向上的正应力为零。但上述研究仅局限于在一定的假设基础上对形状规则的简单结构进行弹塑性分析。

虽然诸如有限元等数值方法开始用于分析正交各向异性结构弹塑性问题，但在处理某些具有高应力梯度的弹塑性问题上，有限元法的计算效率和数值精度都存在一些不足之处，因此有必要进一步发展其他的数值计算方法来分析这类复杂的问题。对于正交各向异性结构来说，由于材料的各向异性以及某些特殊几何形状(如孔洞等)往往会导致较大的应力集中出现。作为一种有效的数值计算方法，边界元法在应力计算上具有较高的效率和精度，因此利用边界元法分析正交各向异性结构的弹塑性问题有其独特的优势。

边界元法是继有限元法之后出现的另一个有效的数值计算方法，目前在多种实际问题的分析和研究中得到了广泛的应用[9]，文献[9]给出了各向同性结构中各种具体问题的边界元求解方法。Rizzo和Shippy[10]于1970年首先把边界元法引入了正交各向异性弹性力学问题的数值分析中，给出了正交各向异性平面弹性问题的直接边界元法，并分析了正交各向异性椭圆形夹杂体和正交各向异性无限大孔板的应力集中情况。后来Sun等[11,12]进一步改进了文献[10]中的弹性问题的基本解，并进一步给出了用于二维正交各向异性弹塑性分析的基本解、边界元求解方程和相应数值技术。

在以上研究的基础上，本文作者从宏观角度出发，利用边界元法及有关数值分析技术，分析了二维正交各向异性结构的弹性应力集中、弹塑性应力以及塑性区分布情况，建立了分析相应弹塑性问题的边界元格式以及求解方法，为正交各向异性结构的弹塑性分析提供了一种有效的数值求解手段。

1 正交各向异性弹塑性本构关系

对于平面应力情况，正交各向异性弹性本构方程可以用矩阵形式表示为[2]

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{或 } \boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{S}\boldsymbol{\sigma}) \tag{1}$$

其中弹性矩阵 $\mathrm{D} = \mathrm{S}^{-1}$，S可以用工程弹性常数表示为

$$\mathrm{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \tag{2}$$

对于小变形的弹塑性问题，应变 $\dot{\varepsilon}$ 可以分成两部分：弹性部分 $\dot{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$ 和塑性部分 $\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$，并用率形式(增量形式)表示为

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{3}$$

这样正交各向异性弹塑性本构方程可以利用率形式表示为

$$\dot{\sigma} = \mathrm{D}\dot{\varepsilon} - \dot{\sigma}^{\mathrm{p}} \quad (\text{或 } \dot{\varepsilon} = \mathrm{S}\dot{\sigma}^{\mathrm{e}} + \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) \tag{4}$$

式中 $\dot{\sigma}^{\mathrm{e}}$ 和 $\dot{\sigma}^{\mathrm{p}}$ 分别为虚拟弹性应力和塑性应力。

根据塑性应变增量与屈服面的正交性引入如下塑性流动法则：

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \lambda \mathrm{a} \tag{5}$$

其中 $\mathrm{a} = \partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$，屈服函数 $f(\boldsymbol{\sigma})$ 取为如下Hill-Tsai型屈服准则[5]：

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\mathrm{H}\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\bar{\sigma}_0^2 = 0 \tag{6}$$

式中

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & H_1 & 0 \\ 0 & 0 & H_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$H_1 = \frac{X^2}{Y^2},\ H_2 = \frac{X^2}{S^2} \tag{8}$$

这里 X、Y、S 分别为正交各向异性材料的屈服强度；等效屈服强度取为 $\bar{\sigma}_0 = X$，等效应力取为 $\bar{\sigma} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\mathrm{H}\boldsymbol{\sigma}}$。

对于理想弹塑性情况，方程(4)所表示的正交各向异性弹塑性本构关系可进一步写为

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^{\mathrm{e}} - \frac{\mathrm{D}\mathrm{a}\mathrm{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{D}}{\mathrm{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{D}\mathrm{a}}\dot{\varepsilon} \tag{9}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2　边界元格式

2.1　边界积分方程和内点应力公式

如果不计体力，可以通过功的互等定理建立如下形式的正交各向异性弹塑性问题的边界积分方程[11,12]：

$$c\dot{u} = \int_{\Gamma} u^{*}\dot{t}\,d\Gamma - \int_{\Gamma} t^{*}\dot{u}\,d\Gamma + \int_{\Omega} \varepsilon^{*}\dot{\sigma}^{p}\,d\Omega \tag{10}$$

利用几何方程和弹性本构关系，可进一步得到内点虚拟弹性应力公式

$$\dot{\sigma} = \int_{\Gamma} (-\sigma^{*})^{T}\dot{t}\,d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{p}^{*}\dot{u}\,d\Gamma + \int_{\Omega} \varepsilon_{p}^{*}\dot{\sigma}^{p}\,d\Omega + \dot{\sigma}^{V} \tag{11}$$

式中 $\dot{\sigma}^{V}$ 为内点强奇异引起的自由项，可以利用塑性应力 $\dot{\sigma}^{p}$ 表示为

$$\dot{\sigma}^{V} = \theta\dot{\sigma}^{p} \tag{12}$$

其中 θ 是与弹性常数有关的无量纲系数矩阵。

方程(10)和(11)中各基本解 u^{*}、t^{*}、σ^{*}、t_{p}^{*}、ε^{*}、ε_{p}^{*} 取如下矩阵形式：

$$u^{*} = \begin{bmatrix} u_{11}^{*} & u_{12}^{*} \\ u_{21}^{*} & u_{22}^{*} \end{bmatrix},\quad t^{*} = \begin{bmatrix} t_{11}^{*} & t_{12}^{*} \\ t_{21}^{*} & t_{22}^{*} \end{bmatrix},$$

$$\sigma^{*} = \begin{bmatrix} \sigma_{111}^{*} & \sigma_{122}^{*} & \sigma_{112}^{*} \\ \sigma_{211}^{*} & \sigma_{222}^{*} & \sigma_{212}^{*} \end{bmatrix},\quad t_{p}^{*} = \begin{bmatrix} t_{111}^{*} & t_{112}^{*} \\ t_{221}^{*} & t_{222}^{*} \\ t_{121}^{*} & t_{122}^{*} \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\varepsilon^{*} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{111}^{*} & \varepsilon_{122}^{*} & 2\varepsilon_{112}^{*} \\ \varepsilon_{211}^{*} & \varepsilon_{222}^{*} & 2\varepsilon_{212}^{*} \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_{p}^{*} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{111}^{*} & \varepsilon_{122}^{*} & 2\varepsilon_{112}^{*} \\ \varepsilon_{2211}^{*} & \varepsilon_{2222}^{*} & 2\varepsilon_{2212}^{*} \\ \varepsilon_{1211}^{*} & \varepsilon_{1222}^{*} & 2\varepsilon_{1212}^{*} \end{bmatrix} \tag{14}$$

详细表达式可参见文献[11]。

2.2　边界元求解方程

把待求问题的边界离散成 n 个一维三节点二次单元，域内离散成 m 个二维四边形四节点双线性单元，对每个节点采用等参插值后分别对方程(10)和(11)进行离散，可以得到如下离散方程：

$$\begin{cases} A\dot{X} = \dot{F} + Q_{x}\dot{\Sigma}^{p} \\ \dot{\Sigma}^{e} = -A_{s}\dot{X} + \dot{F}_{s} + Q_{s}\dot{\Sigma}^{p} \end{cases} \tag{15}$$

式中：$\dot{X}$ 为边界未知量阵列，$\dot{F}$ 和 $\dot{F}_{s}$ 为边界已知量阵列，$\dot{\Sigma}^{e}$ 和 $\dot{\Sigma}^{p}$ 分别为虚拟弹性应力和塑性应力阵列(由所有节点组成)，A 和 A_{s} 分别是与未知量相关的系数矩阵，Q 和 Q_{s} 分别是与塑性应力相关的系数矩阵。

在求解方程(15)之前，需要计算有关系数矩阵的数值积分，其中包括边界积分(A 和 A_{s})和域内积分(Q_{x} 和 Q_{s})。当源点与场点不重合时，上述两种积分可采用普通的高斯积分计算；当源点与场点重合时，上述两种积分出现不同类型的奇异，可分别通过对数积分、坐标变换、刚体位移、常塑性应变场以及位移-面力回代等方法消除相应奇异性[12]。

求解方程(15)可得到如下边界元求解方程：

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{y} + R\dot{\Sigma}^{p} \\ \dot{\Sigma}^{e} = \dot{s} + T_{s}\dot{\Sigma}^{p} \end{cases} \tag{16}$$

式中：$\dot{y} = A^{-1}\dot{F}$ 对应于边界上的弹性解；$\dot{s} = \dot{F}_{s} - A_{s}A^{-1}\dot{F}$ 对应于弹性应力解；与塑性应力相关的系数矩阵分别为 $R = A^{-1}Q_{x}$，$T_{s} = Q_{s} - A_{s}A^{-1}Q_{x}$。

2.3　弹塑性应力计算

方程(16)是一组非线性方程，需要通过数值方法计算其中的本构积分，这里采用初应力法和切向预测径向返回法通过增量迭代过程计算方程(16)中的实际应力状态[12]。

在弹塑性分析的每次载荷增量迭代步中，如果载荷因子取为 $\Delta\alpha$，那么与方程(16)相应的应力增量迭代方程可以写为

$$\Delta\Sigma^{e} = \Delta\alpha_{S} + T_{s}\Delta\Sigma^{p} \tag{17}$$

在按照增量的方式加载过程中，边界单元(或内部单元)可能会发生屈服，而所有节点的应力状态可以首先按照弹性加载来确定，然后根据屈服准则判断某一点是否进入塑性状态。这一增量迭代求解非线性方程的过程可以概括如下：

(1) 按照弹性变形计算试探应力增量 $\Delta\sigma^{e}$；

(2) 判断给定节点的弹塑性状态，然后根据切向预测径向返回法计算当前实际应力增量 $\Delta\sigma$ 和最终实际应力 σ；

(3) 返回步骤(1)，计算下一个给定点的应力，直到所有点的应力计算完毕；

(4) 判断收敛性，并累加塑性应力作为下一次增量迭代计算的初应力，直到所有载荷增量加载完成为止。

图 1 给出了利用边界元法分析二维正交各向异性结构弹塑性问题的基本过程，即首先按照弹性加载方式计算弹性应力，然后对于可能产生塑性屈服的节点利用增量迭代法求解最终的实际应力。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

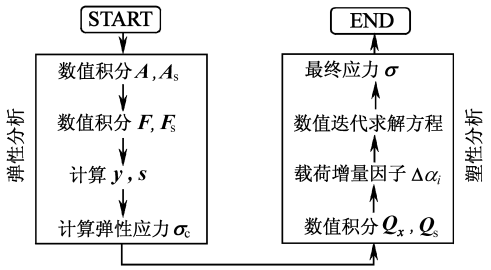

图 1 边界元法分析弹塑性问题的基本流程图

Fig. 1 The flow chart of elasto-plastic analysis by BEM

3 数值算例

3.1 正交各向异性悬臂梁承受均匀横向载荷

正交各向异性悬臂梁在上表面承受均匀向下的压力 q，如图 2 所示。悬臂梁尺寸：L = 110 mm，h = 30 mm，b = 3 mm；单位厚度上的载荷大小为 q = 1.0 MPa；弹性常数及屈服强度如表 1 所示。

表 1 正交各向异性悬臂梁材料常数

Table 1 Material properties of the orthotropic cantilever

Elastic constants				Strength properties/ MPa		
E_1/ MPa	E_2/ MPa	ν_{12}	G_{12}/ MPa	X	Y	S
74.0	85.0	0.26	30.0	24.0	230.0	48.9

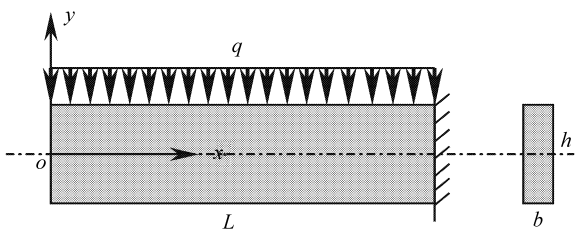

图 2 悬臂梁承受均匀载荷计算模型

Fig. 2 Computational model of a cantilever under uniform load

计算模型一共划分为 377 个节点(包括 80 个边界节点)、40 个边界单元和 366 个内部单元，网格如图 3 所示。文献[8]在基于 σ_y = 0 的假设下给出了这一问题的解析结果，本文计算结果与文献[8]给出的结果进行了比较。

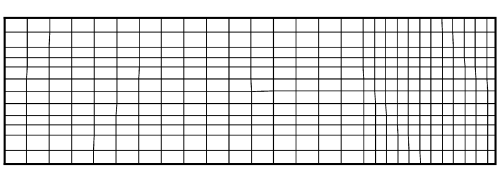

图 3 悬臂梁的计算网格图

Fig. 3 Computational mesh of a cantilever

图 4 给出了悬臂梁上表面(加载端面)以及中性轴(y = 0 mm)上的弹塑性应力分布情况，并与弹性结果做了比较。图 4 表明，在悬臂梁的固定端附近出现了较大的弹性应力集中，而且这里首先出现塑性变形，塑性区大致开始于 x = 85 mm 处的截面上。图 5 给出了 x = 90 mm 和 x = 95 mm 截面上的正应力 σ_x 的分布情况，其中显示出悬臂梁的上下端面附近出现塑性变形，从而形成塑性区。本文计算结果与文献[8]中的结果符合较好，但需要指出的是，文献[8]由于采用了 σ_y = 0 的假设而导致塑性区内不存在 σ_y 和 τ_{xy}，即悬臂梁的塑性变形仅取决于正应力 σ_x，因此得到的结果偏于保守。

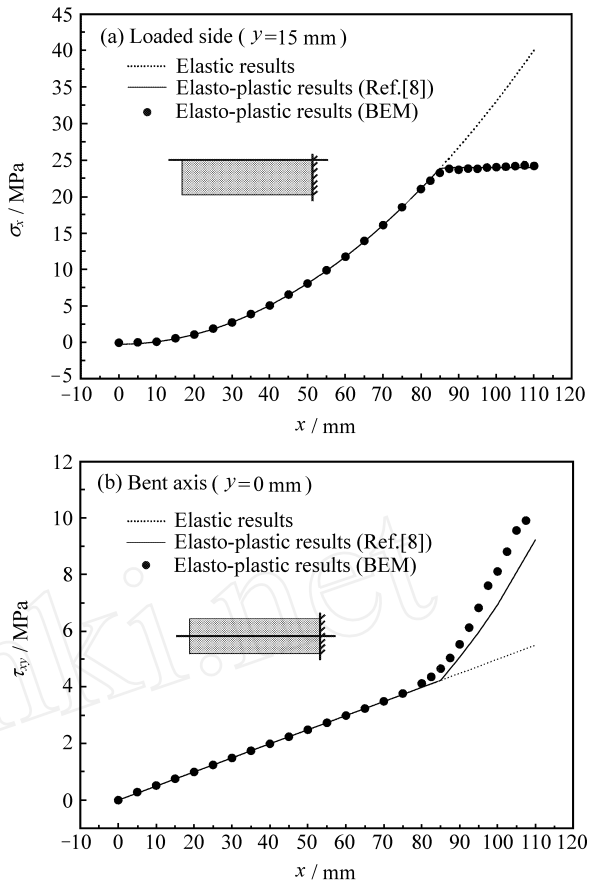

图 4 加载端面(a)和中性轴(b)上的应力分布

Fig. 4 Stress distributions along loaded side (a) and bent axis (b)

3.2 正交各向异性带孔梁的纯弯

本算例是一个带有三个孔的正交各向异性梁在纯弯矩作用下的弹塑性分析。如图 6 所示，其中圆孔沿梁的中心线和轴线对称分布。梁的几何尺寸为 L = 160 mm，H = 50 mm，B = 1 mm；圆孔半径为 r = 10 mm，孔间距为 l_c = 50 mm；单位厚度上的弯矩为 M = 12.0 kN·mm，梁的材料常数如表 2 所示。

由于对称性，计算模型取梁的四分之一，计算网格如图 7 所示，其中包括 360 个节点(包括 100

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

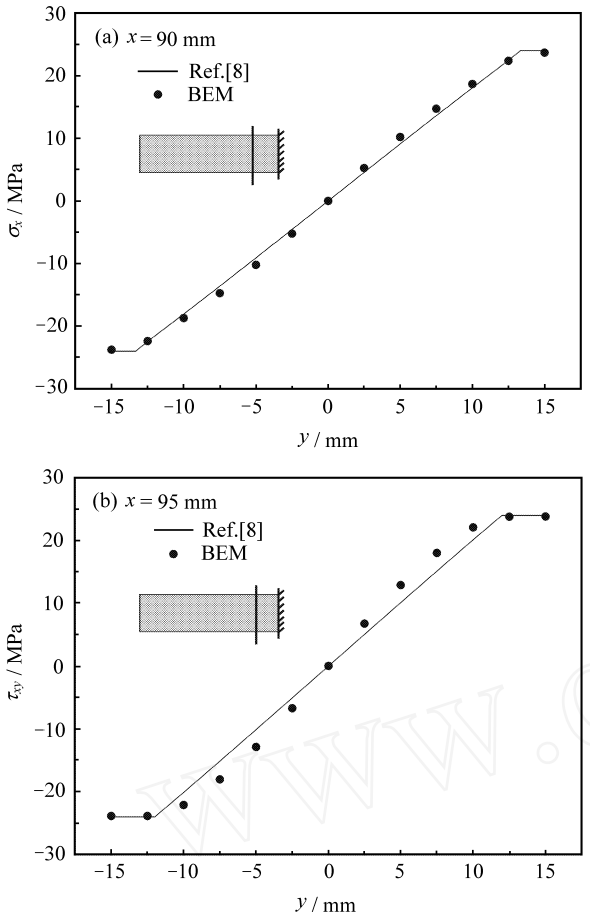

图 5　横截面上的应力分布

Fig. 5　Stress distributions at two sections

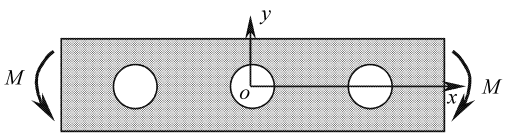

图 6　正交各向异性带孔梁的纯弯

Fig. 6　Orthotropic beam with holes under pure moment

表 2　正交各向异性带孔梁材料常数

Table 2　Material properties of the orthotropic beam with holes

Elastic constants				Strength properties/ MPa		
E_1/ MPa	E_2/ MPa	ν_{12}	G_{12}/ MPa	X	Y	S
1. 2	0. 6	0. 071	0. 07	24. 0	20. 0	16. 8

个边界节点)、50 个边界单元和 309 个内部单元。本算例与商业软件 ABAQUS 的计算结果(有限元方法)进行了比较。在有限元计算模型中，为了能准确地计算圆孔附近的应力，圆孔附近区域需要更为密集的网格划分。

图 8 分别给出了中间圆孔和右侧圆孔在弹性及

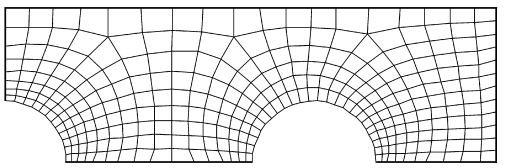

图 7　带孔梁的计算网格图

Fig. 7　Computational mesh of the beam with holes

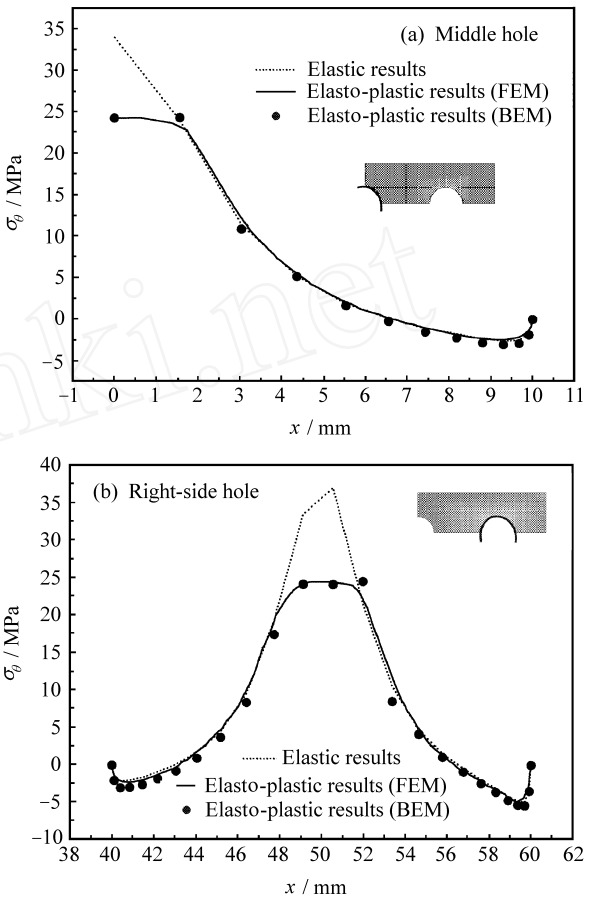

图 8　圆孔孔边周向应力 σ_θ 分布

Fig. 8　Circumferential stress σ_θ distribution along the boundary of the holes

弹塑性状态下的孔边周向应力 σ_θ 分布情况，本文数值方法与有限元方法符合较好。从图中可以看出，梁的两圆孔上端出现了弹性应力集中，而且这两个区域在弹塑性状态下发生了塑性屈服。

图 9 给出了两圆孔之间截面(x = 27 mm)上弹性及弹塑性状态的应力分布情况。图 9 表明，靠近梁的上表面的区域也发生了塑性屈服，而且 σ_y 和 τ_{xy} 与正应力 σ_x 相比很小，对塑性屈服影响很小。

图 10 给出了弯矩 M = 12. 0 kN ·mm 时梁的弹塑性等效应力 $\bar{\sigma}$ 分布情况，其中显示了在梁的上端附近、两圆孔的顶端区域出现了塑性区。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

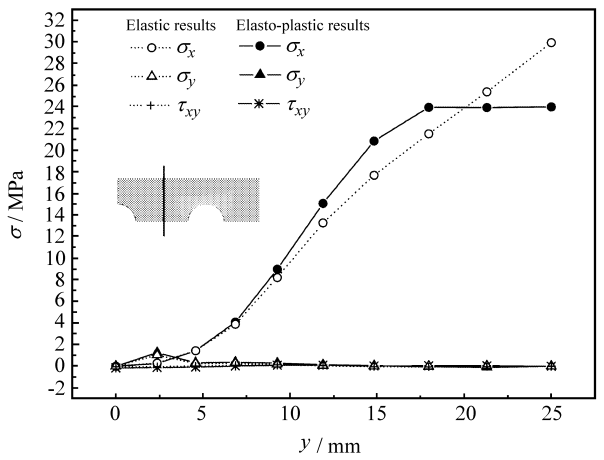

图 9　两圆孔之间截面(x = 27 mm)上的应力分布

Fig. 9　Stress distributions at section x = 27 mm between the two holes

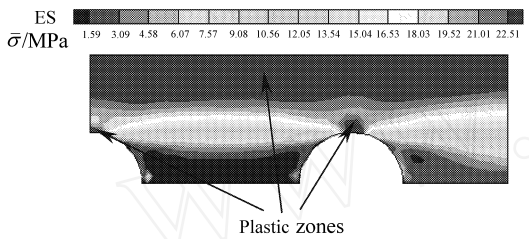

图 10　M = 12.0 kN·mm 时梁的弹塑性等效应力分布

Fig. 10　Elasto-plastic equivalent stress distribution under M = 12.0 kN·mm

4　结　论

(1) 给出了利用边界元法分析二维正交各向异性结构弹塑性问题的求解方法，包括相应边界积分方程、内点应力公式以及边界元数值求解格式。

(2) 利用边界元方法分析了二维正交各向异性悬臂梁和带孔梁的弹塑性问题，本文数值结果与已有结果及有限元结果进行了比较，算例表明本文边界元方法是有效和可靠的。

(3) 对于具有应力集中的正交各向异性结构，本文中的边界元方法可以比较准确地计算应力集中区域的弹塑性应力分布情况。利用边界元法分析这类正交各向异性弹塑性问题时，只需要较少的网格就可以获得精度较高的结果，同时边界元中的“内部单元”仅在塑性区域内起作用，因此边界元法在这类弹塑性问题的求解中具有较高的计算效率和精度。

(4) 本文的边界元方法可进一步推广用于求解一般的二维正交各向异性结构的弹塑性问题，尤其对于具有高应力梯度的结构更为有效。尽管本文中的算例是理想弹塑性情况，但对于材料硬化(软化)的情况本文中给出的边界元方法仍然适用，不同的只是在本构关系中考虑相应影响即可。

参考文献：

[1] 张洪武，王鲲鹏. 弹塑性复合材料多尺度计算模型与算法研究[J]. 复合材料学报，2003，20(1)：60 - 66.
Zhang H W, Wang K P. Numerical model and algorithm for multi-scale analysis of elastic-plastic composite materials [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2003, 20(1): 60 - 66.

[2] Lekhnitskii S G. Theory of Elasticity of an Anisotropic Body [M]. Moscow: Mir Publishers, 1981.

[3] Hinton E, Owen D R J. Finite Element Software for Plates and Shells [M]. Swansea: Prinerige Press Ltd, 1984.

[4] 田宗若. 复合材料中的边界元法[M]. 西安：西北工业大学出版社，1992.
Tian Z R. The Boundary Element Method in Composite Materials[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 1992.

[5] Hill R. A theory of the yielding flow of anisotropic metals [J]. *Proceedings of the Royal Society of London: Series A*, 1948, 193: 281 - 297.

[6] Whang B. Elasto-Plastic Orthotropic Plates and Shells [A]. In: Rowan W H, Hackett R M, eds. Proceedings of the Symposium on Application of the Finite Element Method in Civil Engineering [C]. San Francisco: ASCE, 1969. 481 - 515.

[7] Owen D R J, Figueiras J A. Elasto-plastic analysis of anisotropic plates and shells by the semiloof element [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1983, 19(4): 521 - 539.

[8] Karakuzu R, Ozcan R. Exact solution of elasto-plastic stresses in a metal-matrix composite beam of arbitrary orientation subjected to transverse loads [J]. *Composites Science and Technology*, 1996, 56(12): 1383 - 1389.

[9] 杜庆华，岑章志，嵇 醒，等. 边界积分方程方法 ——边界元法[M]. 北京：高等教育出版社，1989.
Du Q H, Cen Z Z, Ji X, *et al*. The boundary integral equation method-boundary element method[M]. Beijing: Higher Education Press, 1989.

[10] Rizzo F J, Shippy D J. A method for stress determination in plane anisotropic elastic bodies [J]. *Journal of Composite Materials*, 1970, 4(1): 36 - 61.

[11] Sun X S, Cen Z Z. Further improvement on fundamental solutions of plane problems for orthotropic materials [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2002, 15(2): 171 - 181.

[12] Sun X S, Huang L X, Liu Y H, *et al*. Elasto-plastic analysis of two-dimensional orthotropic bodies with the boundary element method [J]. *Computers, Materials & Continua*, 2004, 1(1): 91 - 106.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net