复合材料学报 Acta Materiae Compositae Sinica
第 22 卷 第 3 期 6 月 2005 年
Vol. 22 No. 3 June 2005

文章编号: 1000-3851(2005)03-0150-06

旋转周期复合材料层合结构的有限元屈曲分析

李 军, 薛明德*
(清华大学 航天航空学院工程力学系, 北京 100084)

摘 要: 针对空间结构中常见的复合材料层合壳体结构发展了一种多层相对自由度层合壳元。这种实体型壳元既可以用较粗的网格很好地模拟层合壳, 又易与三维实体单元相连接, 使变厚度、带有补强的复合材料层合壳体等复杂结构得以正确建模。同时运用旋转周期有限元技术对大规模的空间复合材料层合结构成功实施了屈曲分析。数值算例验证了本文计算策略的有效性。

关键词: 屈曲分析; 三维有限元法; 复合材料; 层合壳; 旋转周期
中图分类号: TB332 **文献标识码**: A

BUCKLING ANALYSIS OF ROTATIONALLY PERIODIC LAMINATED COMPOSITE SHELLS BY FEM

LI Jun, XUE Mingde*
(Dept. of Engineering Mechanics, School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: A new multilayer shell element with relative degrees-of-freedom (DOF) was developed for modeling laminated composite shells often used in aerospace structures. With this solid-type shell element, satisfactory resolution can be ensured even if a relatively coarse FE mesh is employed, and this element can be easily connected with other solid type elements. All of these features enable its promising application in the simulation of modern composite structures, even if with varying thickness or complicated joint parts. For the buckling analysis of large-scale aerospace composite laminated structures, a computational strategy that combines the rotationally periodic FE method and this new shell element is implemented successfully. The numerical examples show the efficiency and accuracy of the proposed computational strategy.

Keywords: buckling analysis; 3D FEM; composite materials; laminated shell; rotational periodicity

复合材料层合结构因为具有高比强度、高比刚度等一系列优点, 已在航空航天、汽车船舶和桥梁建筑等工业领域得到广泛应用。准确预测此类结构的临界屈曲载荷和破坏模式, 具有重要的工程意义。已有大量的方法致力于该问题的研究[1,2], 其中绝大多数方法都是基于二维板壳理论, 如逐层理论[3]、各种单层理论(如经典板壳单元、一阶或高阶剪切变形板壳单元等)。这些单元在预测简单结构的整体响应时可以获得比较满意的结果, 但对于实际的复合材料层合壳体结构, 由于常常做成变厚度或者局部带有金属联接件和补强件, 而且其横向剪切模量远低于面内模量, 上述单元无论是在对结构建模还是在预测结构的局部响应和层间应力场方面都会遇到困难。若采用三维实体单元进行分析, 又因其厚度与面内尺寸差异过大, 对实际结构往往导致计算规模过大而无法实施计算。为此, 文献[4]发展了一种相对自由度单元模拟蜂窝夹芯层合壳的表层, 夹芯层则采用实体单元模拟, 并成功应用到旋转周期蜂窝夹芯层合壳的屈曲分析中; 文献[5]则发展了一种 32 节点相对自由度三层壳元, 用于计算蜂窝夹芯层合壳的应力场。由此看来采用相对自由度类型单元模拟层合结构是比较经济实用的, 基于此经验, 本文作者发展了一种任意层数的相对自由度壳元, 同时运用旋转周期有限元技术, 对航天领域大量采用的旋转周期复合材料层合结构成功地实施了屈曲分析, 并由典型数值算例验证了本文

收稿日期: 2004-05-31; **收修改稿日期**: 2004-09-29
基金项目: 国家"863"航天高科技项目(863-2-4-1-9)
通讯作者: 薛明德, 教授, 研究方向: 结构弹塑性分析和复合材料结构分析 E-mail: xuemd@mail.tsinghua.edu.cn

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

计算方案的可靠性与有效性。

1　多层相对自由度壳元

本文中以三维 Wilson 非协调实体元[6]为基础，发展了易于模拟变厚度层合壳并能与三维实体单元自然连接的多层相对自由度层合壳元。传统的壳元是以壳体的中面节点的位移(三个)与转角(两个)作为节点自由度，通常要求一个单元内为一种材料且要等厚度，故不易与三维实体单元连接。而用三维实体单元计算大而薄的板壳结构时，由于长厚比的限制，使计算规模过大而难以实施。Wilson 等[6]将非协调实体元用于计算板壳结构时引入相对自由度的概念，从而克服了将三维实体元用于壳体分析时的数值困难。有关单层相对自由度壳元的内容详见文献[4,7]。

构造多层相对自由度壳元的思路如下：

(1) 一个单元由图 1(a)示 n 个 16 节点相对自由度单层壳元构成，共计 $16\times n$ 个节点，$48\times n$ 个自由度。以第 k 层为例，相对于三维实体单元，对其坐标和位移做了如下线性变换：

$$\begin{cases} \bar{x}_i^k = x_i^k - x_{i+4}^k \\ \bar{x}_{i+4}^k = x_{i+4}^k \end{cases}, \quad \begin{cases} \bar{u}_i^k = u_i^k - u_{i+4}^k \\ \bar{u}_{i+4}^k = u_{i+4}^k \end{cases}$$

$$(i = 16(k-1) + j,\ j = 1,2,3,4,9,10,11,12) \tag{1}$$

式中上标 k 为层号。可以看出：$\bar{x}_{i+4}^k$、$\bar{u}_{i+4}^k$ 仍然保持原三维等参实体元的下表面节点绝对坐标和绝对位移不变，而 $\bar{x}_i^k$、$\bar{u}_i^k$ 则是原来上表面节点相对于底面节点的距离和相对位移，即相对自由度的概念。此单层相对自由度单元相对于三维实体单元用于分析薄壁结构时的本质性优势的证明详见文献[4]。

(2) 第 $(k-1)$ 层的下表面节点与第 k $(k=2,3,\cdots,n)$ 层的上表面节点满足位移连续条件

$$\bar{u}_i^{k-1} = \bar{u}_j^k + \bar{u}_{j+4}^k$$
$$(k = 2,\cdots,n;\ m = 16(k-2);$$
$$i = m+5, m+6, m+7, m+8, m+13,$$
$$m+14, m+15, m+16;\ j = i+12) \tag{2}$$

式中：位移 $\bar{u}_i^k$ 等均用“-”表示相对自由度，下标 i 或 j 表示节点编号。上述 $\bar{u}_i$ $(i=1,2,\cdots,n\times 16)$ 节点位移矢量可分为两组

$$\bar{u}^{\mathrm{T}} = (\bar{u}_{(1)}^{\mathrm{T}},\ \bar{u}_{(2)}^{\mathrm{T}}) \tag{3}$$

其中 $\bar{u}_{(1)}$ 为独立的自由度，有 $(n+1)\times 8\times 3$ 个分量

$$\bar{u}_{(1)}^{\mathrm{T}} = (\bar{u}_1^{1,\mathrm{T}}, \bar{u}_2^{1,\mathrm{T}}, \cdots, \bar{u}_{16}^{1,\mathrm{T}}; \cdots; \bar{u}_{m+5}^{k,\mathrm{T}}, \cdots, \bar{u}_{m+8}^{k,\mathrm{T}}, \bar{u}_{m+13}^{k,\mathrm{T}}, \cdots, \bar{u}_{m+16}^{k,\mathrm{T}}; \cdots) \tag{4a}$$

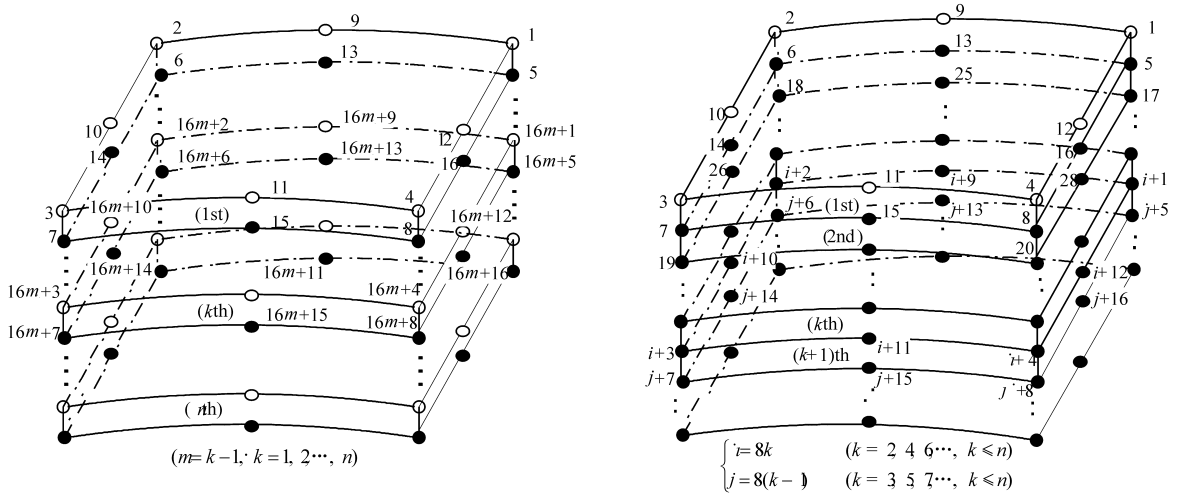
$$\bar{u}_{(2)}^{\mathrm{T}} = (\cdots; \bar{u}_{m+1}^{k,\mathrm{T}}, \cdots, \bar{u}_{m+4}^{k,\mathrm{T}}, \bar{u}_{m+9}^{k,\mathrm{T}}, \cdots, \bar{u}_{m+12}^{k,\mathrm{T}}; \cdots)$$
$$(m = 16(k-1);\ k = 2,\cdots,n) \tag{4b}$$

经整理后，式(2)的 $(n-1)\times 8\times 3$ 个位移协调条件可表示为矩阵形式

$$c_{11}\bar{u}_{(1)} + c_{12}\bar{u}_{(2)} = 0 \tag{5}$$

(3) 引入拉格朗日乘子 $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{24(n-1)})^{\mathrm{T}}$，把式(5)的 $(n-1)\times 8\times 3$ 个约束条件引入到单元势能泛函 W 中去，可得

$$\Pi = W + \Lambda^{\mathrm{T}}[c_{11}\bar{u}_{(1)} + c_{12}\bar{u}_{(2)}] \tag{6}$$



(a) n layers of 16 nodes shell elements　　(b) A laminated shell element

图 1　由 n 个单层相对自由度壳元演变为 1 个 n 层相对自由度层合壳元

Fig. 1　Process to form a multilayer relative-freedom laminated shell element with n layers of 16 nodes relative-freedom shell elements

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

由最小势能原理可得到

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & c_{11}^{T} \\ K_{21} & K_{22} & c_{12}^{T} \\ c_{11} & c_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{(1)} \\ \bar{u}_{(2)} \\ \Lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

式中：K_{ij} 是 n 层 16 节点相对自由度壳元的刚度矩阵；$P_{(1)}$ 是节点力矢量。从式(6)中消去拉格朗日乘子 Λ 与界面自由度 $\bar{u}_2$ 得到

$$[K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21} + A^{T}(c_{12}K_{22}^{-1}c_{12}^{T})^{-1}A]\bar{u}_{(1)} = P_{(1)} \tag{8}$$

其中

$$A = c_{11} - c_{12}K_{22}^{-1}K_{21} \tag{9}$$

最终可得图 1(b)所示的 n 层相对自由度层合壳元的节点位移向量

$$(a^{e})^{T} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_i, \cdots, \bar{u}_{8(n+1)}) = \bar{u}_{(1)}^{T} \tag{10}$$

式(10)中层合壳元的自由度 $\bar{u}_i$ 与原单层壳元自由度 ${}^{k}\bar{u}_i$ 的关系为

$$\begin{aligned} &\bar{u}_i = {}^{1}\bar{u}_i && (i \leq 16;\ k = 1) \\ &\bar{u}_i = {}^{k}\bar{u}_{i+8k-12} && (i > 16;\ k = 2,4,6,\cdots,\ k \leq n) \\ &\bar{u}_i = {}^{k}\bar{u}_{i+8k+8} && (i > 16;\ k = 3,5,7,\cdots,\ k \leq n) \end{aligned} \tag{11}$$

在求得单元的相对位移矢量 a^{e} 后，层合壳元的绝对位移可由式(12)得到，并进而求得单元内各层应变与应力。

$$\begin{aligned} &u_i = \bar{u}_i + \bar{u}_{i+4} && (i = 1,2,3,4,9,10,11,12) \\ &u_i = \bar{u}_i && (i = 5,6,7,8,13 \leq i \leq 8(n+1)) \end{aligned} \tag{12}$$

2　旋转周期结构的有限元屈曲分析

本文中考察结构的线性屈曲行为，基于如下基本假设：(1)载荷是保守的，不依赖于物体的位形变化而发生变化；(2)屈曲前结构处于小变形状态，忽略了初位移刚度矩阵中的非线性项；(3)每一增量步内应力增量和位移增量成线性关系。

对于图 2(a)所示的典型旋转周期结构，本文中采用文献[7,8]提出的方法，假设沿周向可以分为 N 个完全相同的子结构。假设结构的总体坐标系为 XYZ，每一个子结构建立局部坐标系 $x^{(j)}\ y^{(j)}\ z^{(j)}$ $(j = 1, 2, \cdots, N)$，且第一个子结构的局部坐标系 $x^{(1)}\ y^{(1)}\ z^{(1)}$ 与结构的总体坐标系重合。对于与某一子结构相关的自由度分为三类：属于当前子结构并与其它子结构无关的自由度称为该子结构的内部自由度 X_1；属于当前子结构并与其它子结构相关的自由度称为主边界自由度 X_2；属于其它子结构并与当前子结构相关的自由度称为从边界自由度 X_3，如图 2(b)所示。由于所有的子结构具有相同的局部坐标系和网格划分，利用界面主从自由度技术[7]，对整个结构的静力分析可以减缩为对一个典型子结构进行静力分析，其有限元求解方程为

$$\left[\sum_{j=1}^{N} K_{jj}^{(1)} + \sum_{j=2}^{N} (\Phi^{j-1})^{T} K_{1j}^{(1)} \Phi^{j-1} + \sum_{j=2}^{N} (\Phi^{j-1}) K_{j1}^{(1)} (\Phi^{j-1})^{T}\right] u_1 = P_1 \tag{13}$$

其中：u_1 和 P_1 分别为第一个子结构的节点位移向量和节点力向量；上标(1)表示第一个子结构的刚度矩阵；$K_1^{(1)}$ 表示第一个子结构的节点自由度(包括主边界自由度和内部自由度)之间相互作用的刚度项；$K_{jj}^{(1)}$ 表示第 j 个子结构的从边界节点与第 1 个子结构的节点之间相互作用的刚度项；$K_j^{(1)}$ 和 $K_{j1}^{(1)}$ 表示第 1 个子结构的从边界节点与第 j 个子结构的节点之间相互作用的刚度项；Φ^{j-1} 则表示第 j 个子结构位移矢量从局部圆柱坐标系到整体笛卡儿坐标系的变换矩阵。

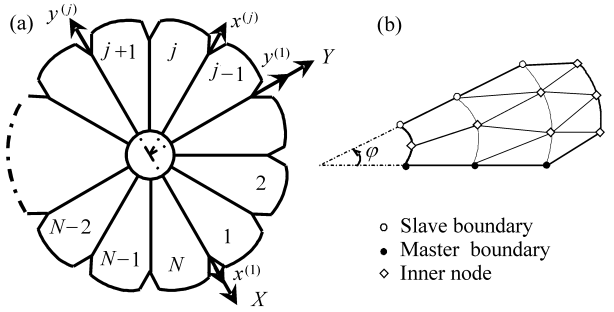


图 2　旋转周期结构(a)和典型子结构节点分类(b)示意图

Fig. 2　A rotationally periodic structure (a) and node classification (b) of one substructure

考虑到旋转周期结构的屈曲模态仍然保持旋转周期性，即当整个结构旋转过一个子结构的张角 $2\pi/N$ 时，相当于整个结构的屈曲模态旋转了一个相位角 θ，于是可以运用复约束方法[7]，引入相邻子结构之间屈曲模态的约束关系，最终整个结构的屈曲求解方程可以归结为以下特征值屈曲方程

$$(T^{H}K_{e}T + \lambda T^{H}K_{G}T)X = 0 \tag{14}$$

式(14)是 Hermitian 特征值方程。其中 T^{H} 是 T 的共轭转置矩阵；T 的定义如下：

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & \Lambda e^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = TX \tag{15}$$

Λ 为从笛卡儿坐标系到圆柱坐标系的转换矩阵。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{\Lambda}_2^{-1} & & \\ & & \vdots & \\ & & & \boldsymbol{\Lambda}_n^{-1} \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\Lambda}_i^{-1})$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_i = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\phi = \frac{2\pi}{N}; i = 1, 2, \cdots, J \right) \tag{16}$$

式(14)中只包含了第一个子结构的自由度 $X^T = (X_1 + X_2)^T$，而其余子结构与第一个子结构的相互作用都已经包含在式(14)的刚度矩阵中。由于事先并不知道结构各阶屈曲模态的周向波数，在计算过程中应当逐一取

$$\theta = 0, 2\pi/N, 4\pi/N, \cdots, 2\pi(N/2 - 1)/N, \pi$$
(如果 N 为偶数)

$$\theta = 0, 2\pi/N, 4\pi/N, \cdots, 2\pi(N - 1)/2N$$
(如果 N 为奇数) (17)

从而求得每一个对应的周向波数的屈曲载荷和屈曲模态。

3　算例分析

3.1　复合材料层合圆柱壳受均布侧压失稳

为了验证算法的可靠性，分析了两个典型算例，并与文献[9]中的解析解和文献[4]中的三维实体元与单层相对自由度壳元组合的有限元解进行了比较。

如图3所示两端简支的碳纤维环氧树脂基复合材料层合圆柱壳受均布侧压失稳，其边界条件为：在 $z = 0$ 和 $z = l$ 的中面处位移 u，v，w 和弯矩为零。单层碳纤维环氧的材料参数为 $E_{11} = 1.4966 \times 10^8$ kN/m^2，$E_{22} = E_{33} = 0.0993 \times 10^8$ kN/m^2，$G_{12} = G_{31} = 0.0448 \times 10^8$ kN/m^2，$G_{23} = 0.0388 \times 10^8$ kN/m^2，$\nu_{21} = \nu_{31} = \nu_{23} = 0.28$。

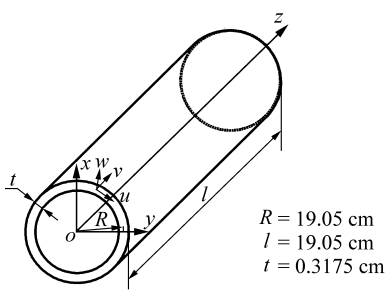


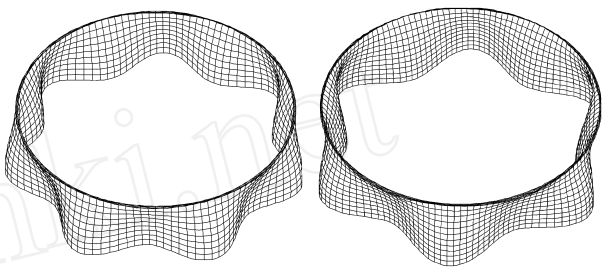
图3　碳纤维增强环氧树脂基复合材料层合圆柱壳

Fig. 3　Carbon fiber reinforced epoxy-laminated cylindrical shell

由于结构在 z 方向具有对称性，故计算时仅取 $l/2$ 长度进行分析。为证明计算的收敛性，利用本文中提出的层合壳元对每一算例都采用了两种疏密不同的网格，方案1、2都采用4层相对自由度层合壳元。

3.1.1　$[0/90_2]_S$ 铺层

临界屈曲载荷和屈曲模态的计算结果如表1和图4(a)所示。



(a) $[0/90_2]_S$ stack　　(b) $[90/0_2]_S$ stack

图4　层合圆柱壳屈曲模态图

Fig. 4　Buckling modes of the laminated cylindrical shell

表1　$[0/90_2]_S$ 铺层的计算结果

Table 1　The numerical results of $[0/90_2]_S$ stack

	Mesh 1	Mesh 2	FE results of ref. [4]	Theoretic results of ref. [9]
Number of substructures	60	110	110	/
Number of DOFs in each substructure	1155	2175	2175	/
Total number of DOFs	52,200	184,800	184,800	/
Critical load/(kN·m^{-2})	1.369	1.360	1.359	1.420
Circumferential wavenumber	7	7	7	7

3.1.2　$[90/0_2]_S$ 铺层

临界屈曲载荷和屈曲模态的计算结果如表2和图4(b)所示。

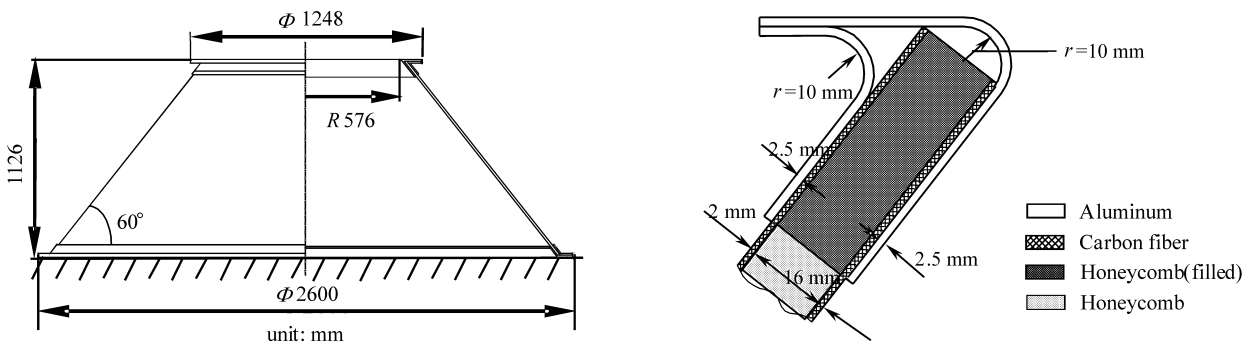
表2　$[90/0_2]_S$ 铺层的计算结果

Table 2　The numerical results of $[90/0_2]_S$ stack

	Mesh 1	Mesh 2	FE results of ref. [4]	Theoretic results of ref. [9]
Number of substructures	70	150	150	/
Number of DOFs in each substructure	1395	2955	2955	/
Total number of DOFs	73,500	333000	333000	/
Critical load/(kN·m^{-2})	2.357	2.349	2.349	2.470
Circumferential wavenumber	6	6	6	6

以上两个算例中改变层合壳元的疏密程度，其计算结果和参考文献中的结果吻合得很好，这说明本文中所发展的多层相对自由度层合壳元具有较高

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net



(a) Cross-section　　(b) Material details of the laminated shell

图 5　带金属联结框的复合材料层合锥壳结构示意图

Fig. 5　Laminated conical shell with metallic frames

的计算效率与精度。所有临界屈曲载荷都比参考文献[9]中的解析解略小是因为文献[9]中假设壳的横向剪切应变为常数，而本文中所采用的单元并未做此假设，故结构显得软一些。

3.2　带金属法兰复合材料层合锥壳受外压失稳

外表面受均匀压力的带金属法兰的复合材料层合锥壳结构如图 5 所示，其底部固定，各部分的材料属性如表 3 所示。

表 3　复合材料层合锥壳的材料参数

Table 3　Material properties of the laminated conical shell

	Aluminum	Carbon fiber	Honeycomb (filled)	Honeycomb
E_{11}/ GPa	60. 0	23. 98	0. 75	2. 5 ×10 - 4
E_{22}/ GPa	60. 0	23. 98	0. 75	2. 5 ×10 - 4
E_{33}/ GPa	60. 0	3. 72	0. 75	0. 12
G_{12}/ GPa	23. 08	9. 37	0. 28	9. 0 ×10 - 5
G_{23}/ GPa	23. 08	3. 57	0. 28	0. 129
G_{31}/ GPa	23. 08	3. 57	0. 28	0. 129
ν_{12}	0. 3	0. 28	0. 36	0. 35
ν_{23}	0. 3	0. 03403	0. 36	0. 3
ν_{31}	0. 3	0. 3	0. 36	6. 25 ×10 - 4

整个结构被分为 50 个子结构，采用了三层的相对自由度层合壳元、16 节点 Wilson 非协调实体元和两者之间的过渡单元建模，共 799200 自由度，每个子结构则有 17310 自由度，如图 6 所示。由于采用了旋转周期屈曲分析方法，实际上只需对一个子结构进行分析，这不但大大降低了计算规模，而且提高了计算临界屈曲载荷的准确度。前 4 阶屈曲载荷和屈曲模态的计算结果分别如表 4 和图 7 所示。

从计算结果中可以看出层合锥壳下法兰处的连接部位由于应力集中而首先发生局部屈曲。要计算

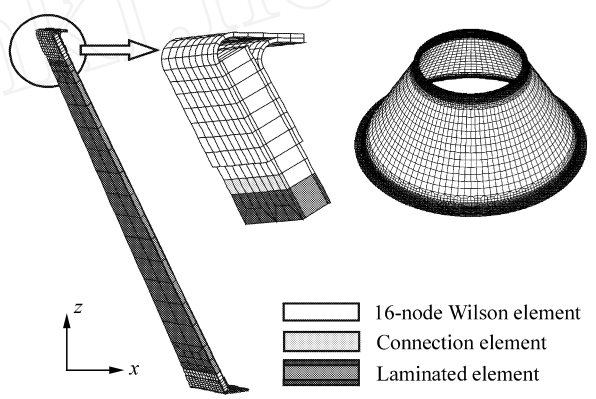


图 6　复合材料层合锥壳整体有限元网格及单个子结构有限元网格图

Fig. 6　FE mesh of the laminated composite conical shell and a typical substructure

表 4　复合材料层合锥壳前 4 阶临界屈曲载荷

Table 4　Critical loads of the first four buckling modes

	1st mode	2nd mode	3rd mode	4th mode
Critical load/ MPa	1. 779	1. 780	1. 782	1. 786

出这种局部屈曲现象就必须划分很精细的网格。此种情况下，若采用三维实体单元，为避免单元病态要求网格划分很密，这往往导致计算规模过大而难于实施。为了解决这个问题，一种传统的方法是忽略掉边框，代之以某种假设的边界条件，这样很难得到正确的局部屈曲模态与临界载荷，若用于实际工程结构设计时往往会带来不安全的因素；另一种传统的方法是用壳单元去离散壳壁部分，而边框部分用实体单元模拟，但传统壳单元和实体单元的连接往往比较复杂而且极易出错。本文中提出的这种计算方案则很好地解决了准确模拟结构局部屈曲行为和控制计算规模之间的矛盾。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

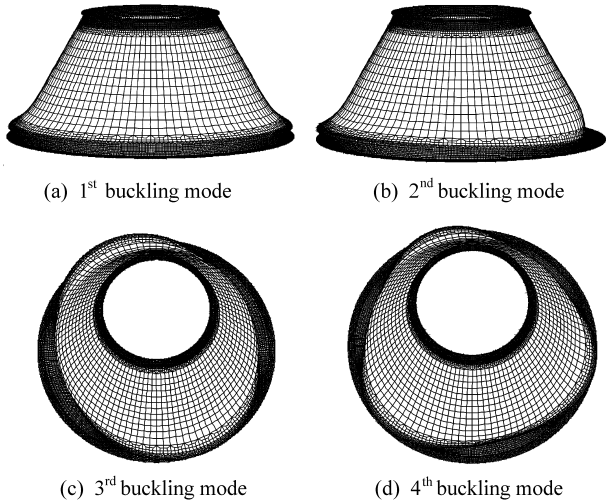


图 7　复合材料层合锥壳屈曲模态图

Fig. 7　The buckling modes of the conical shell

4　结　论

从三维非协调实体元出发构造了一种任意多层相对自由度层合壳元。由于引入相对自由度而摒弃了传统壳元的转动自由度, 该层合壳元易于模拟变厚度层合壳体, 可以方便地与三维实体元连接, 从而为复合材料层合结构的分析实现了一种基于三维理论的建模方案。同时对于旋转周期复合材料层合结构的屈曲分析, 联合运用旋转周期有限元屈曲分析技术, 把对整个结构的分析减缩为只需对一个典型子结构进行分析, 在不失准确性的前提下大大降低了计算规模, 从而为复杂的旋转周期复合材料层合结构的屈曲分析提供了准确可行的计算方法。典型算例验证了本文计算方法的准确性和有效性, 最后对一个实际的工程结构成功实施了屈曲分析, 并从中获得了其局部屈曲模态。

参考文献:

[1] Noor A K, Burton W S. Assessment of computational models for multilayered composite shells [J]. *Appl Mech Rev*, 1990, 43: 67 - 97.

[2] 张　雨, 向锦武. 复合材料层合厚圆柱壳高阶理论的改进及其应用 [J]. 复合材料学报, 2002, 19(4): 86 - 91.
Zhang Y, Xiang J W. Higher-order theory and its finite element method for thick laminated composite cylindrical shells [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2002, 19(4): 86 - 91.

[3] Reddy J N. An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates [J]. *Comp Struct*, 1993, 25: 21 - 58.

[4] Xiang Z H, Xue M D, Liu Y H, Cen Z Z. Finite element buckling analysis of rotationally periodic laminated composite shells [J]. *Int J Numer Meth Eng*, 2002, 53: 959 - 981.

[5] 程乐锦. 薛明德. 胡　宁. 基于三维有限元法的层合圆柱壳应力分析 [J]. 复合材料学报, 2003, 19(4): 88 - 93.
Cheng L J, Xue M D, Hu N. Stress analysis of the laminated cylindrical shells based on the 3D FEM [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2003, 19(4): 88 - 93.

[6] Wilson E L, Taylor R L, Doherty W P, *et al*. Incompatible Displacement Models [A]. In: Fenves Steven J. Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics [M]. New York: Academic Press Inc, 1973.

[7] 王勖成. 有限单元法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
Wang X C. Finite Element Method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.

[8] 李建中. 旋转周期结构屈曲问题的数值分析 [D]. 北京: 清华大学, 1998.
Li J Z. Numerical analysis of buckling of rotationally periodic structures [D]. Beijing: Tsinghua University, 1998.

[9] Han B, Simitses G J. Analysis of anisotropic laminated cylindrical shells subjected to destabilizing loads Ⅱ: Numerical results [J]. *Comp Struct*, 1991, 17: 183 - 205.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net