复合材料学报 第23卷 第1期 2月 2006年
Acta Materiae Compositae Sinica Vol. 23 No. 1 February 2006

文章编号: 1000-3851(2006)01-0147-07

复合材料层合梁接触损伤问题的分析

胡伟平*, 张 行, 孟庆春
(北京航空航天大学 固体力学研究所, 北京 100083)

摘 要: 将连续介质损伤力学的分析计算方法与层合梁无损伤接触问题的分析相结合, 分析层合梁在接触载荷作用下, 层间胶层的损伤分布及应力分布。采用逆解法得到复合材料层合梁无损伤接触问题的解答, 在此基础上, 用附加载荷法与迭代法, 进行接触损伤分析, 得到了层间胶层的损伤分布及应力分布。计算结果显示, 该方法收敛性好, 求解简单。

关键词: 层合梁; 接触损伤; 附加载荷法
中图分类号: TB330.1; O34 **文献标识码**: A

Analysis on contact damage problem of composite beam

HU Weiping*, ZHANG Xing, MENG Qingchun
(Institute of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: The continuity damage mechanics method, combined with an analysis on the contact problem of composite beams without damage, is introduced into the analysis on the contact damage problem of composite beams under static contact loading. The analysis on the contact problem of the non-damaged composite beam is solved by an inverse method. The approach of additional loading and iteration are applied to the analysis of the interlaminar damage and delamination problem of composite beams under static contact loading. The damage distribution and stress distribution of glue layers are obtained. The result shows that this method has nice behavior of convergence, and is convenient for application.

Keywords: composite beam; contact damage; additional loading method

接触问题是固体力学领域中的一个重要问题。其研究起源于 Hertz 1882 年报道的关于两个弹性椭球体无摩擦接触问题[1]。Hertz 的分析至今仍然是工程设计(包括弹性接触等)的基础, 但 Hertz 理论建立在半无限大体的基础上, 这一分析方法对于金属梁或厚板的接触问题是可行的; 对于复合材料层合结构, 由于每一单层的厚度与接触区尺寸相当, 若仍按半无限大体来处理, 势必给应力分析造成较大的误差, 而应力分析的不精确会使进一步的接触损伤分析无法进行。为了克服经典接触理论的不足, 发展了接触问题的数值解法, 文献[2]包含了国内这方面有代表性的研究成果。

文献[3～6]报道了复合材料层合结构的接触问题, 涉及到损伤分析的工作主要是在实验方面或者是用有限元分析[7～9], 应用损伤力学方法进行接触损伤分析的工作还不多见。本文作者在层合梁无损伤接触分析[10]的基础上, 结合文献[11]提出的连续介质损伤力学分析方法进行层合梁的接触损伤分析, 既避开了非线性接触问题的分析, 又充分利用了无损伤接触分析的结果, 最后得到胶层的损伤分布及应力分布。

1 无损伤接触问题分析的简单回顾

在这里, 简要介绍无损伤接触问题的分析方法, 详细内容见文献[10]。

1.1 无损伤接触问题的力学模型

图 1 表示两端简支复合材料层合梁, 其上表面中点与圆柱压头开始接触。根据叠加原理与圣维南原理, 图 1 所示的原始受力状态可以最终分解为对称受力状态〈α〉、反对称受力状态〈β〉和纯弯受力状态, 如图 2(a)、图 2(b)和图 2(c)所示。求解时, 可以对这三种受力状态分别进行分析, 而且纯弯受力

收稿日期: 2005-03-02; **收修改稿日期**: 2005-04-21
通讯作者: 胡伟平, 博士, 讲师, 研究方向: 复合材料力学、损伤力学 E-mail: huweiping@buaa.edu.cn

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

状态图 2(c) 可以直接用经典层合梁理论分析，从而大大简化了问题的求解。

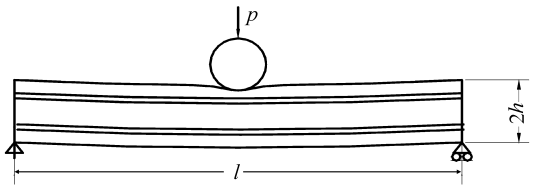
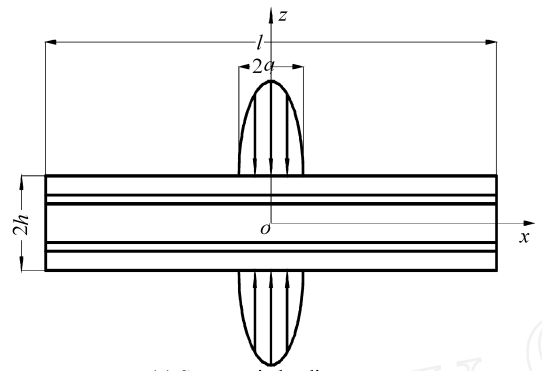
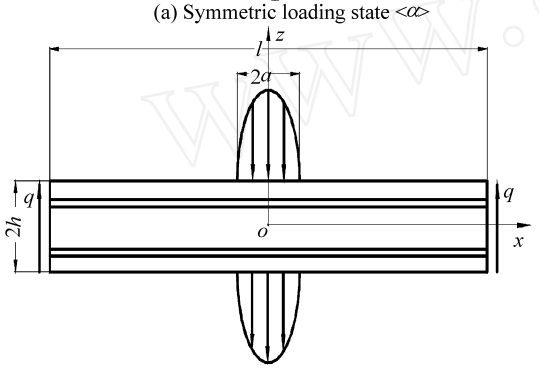


图 1　复合材料层合梁的原始受力状态

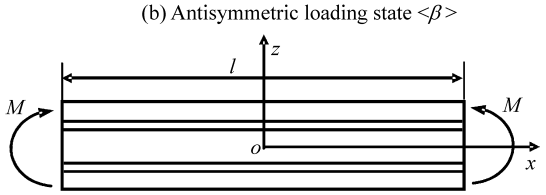
Fig. 1 The original loading state of composite beam



(a) Symmetric loading state <α>



(b) Antisymmetric loading state <β>



(c) Additional loading state

图 2　受力状态的分解

Fig. 2　The decomposition of loading state

1.2　对称与反对称受力状态的分析

对于对称受力状态，可假设层合梁的位移模态为

$$\left.\begin{aligned} w^k(x,z) &= \sum_{m,n} C_{mm}^k f_m(x)\, g_n(z) \\ u^k(x,z) &= \sum_{m,n} A_{mn}^k s_m(x)\, t_n(z) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中：m、$n = 1, 2, 3, \cdots$，表示级数中函数项的编码；k 表示层合梁的铺层编码；A_{mn}^k、C_{mm}^k 为待定广义位移；同时

$$f_m(x) = (-1)^{m+1}\cos\left(\frac{2m-1}{l}\pi x\right)$$

$$s_m(x) = (-1)^{m}\sin\left(\frac{2m-1}{l}\pi x\right)$$

$$g_n(z) = P_{2n-1}\left(\frac{z}{h}\right) = \sum_{i}^{n-1}\frac{(-1)^i(4n-2i-2)!}{2^{2n-1}i!(2n-i-1)!(2n-2i-1)!}\left(\frac{z}{h}\right)^{2n-2i-1}$$

$$t_n(z) = P_{2n-2}\left(\frac{z}{h}\right) = \sum_{i}^{n-1}\frac{(-1)^i(4n-2i-4)!}{2^{2n-2}i!(2n-i-2)!(2n-2i-2)!}\left(\frac{z}{h}\right)^{2n-2i-2}$$

式中，$P\left(\frac{z}{h}\right)$ 为勒让德函数。

同理，可设出反对称受力状态下层合梁的位移模态，具体形式见文献[10]。

1.3　接触区压力分布

对称与反对称受力状态中，层合梁上表面接触区压强分布可近似表示为

$$p(x) = \begin{cases} -p_0\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^{\bar{m}}\right], & x \in [-a, a] \\ 0, & x \notin [-a, a] \end{cases} \tag{2}$$

式中：p_0 为最大压强，a 为接触区半宽，$\bar{m}$ 为待定系数由接触区表面的位移协调条件确定[10]。

由式(2)，外载荷的合力 P 与最大压强有如下关系：

$$P = 2\frac{a[1-(-1)^{\bar{m}}+2\bar{m}]}{1+\bar{m}}p_0 \tag{3}$$

将外载荷 $p(x)$ 用三角级数展开

$$p(x) = \sum_m p_m(x)(-1)^{m+1}\cos\left(\frac{2m-1}{l}\pi x\right) \tag{4}$$

式中

$$p_m(x) = \frac{2}{l}\int_{-a}^{a} p(x)(-1)^{m+1}\cos\left(\frac{2m-1}{l}\pi x\right)\mathrm{d}x$$

1.4　能量解法

应用分区广义势能原理[12]满足平衡方程、静力边界条件以及界面的位移与面力连续条件，可以得到关于广义位移 A_{mn}^k、C_{mn}^k 的线性代数方程组

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k,p,q} T^{(AA)}_{kmnpq} A^{k}_{pq} + \sum_{k,p,q} T^{(AC)}_{kmnpq} C^{k}_{pq} = 0\\ \sum_{k,p,q} T^{(CA)}_{kmnpq} A^{k}_{pq} + \sum_{k,p,q} T^{(CC)}_{kmnpq} C^{k}_{pq} = B_{kmn}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$(k = 1,2,\cdots,k_{\max};\ m,\ p = 1,2,3,\cdots,M,\ n,\ q = 1,2,3,\cdots,N)$$

方程中的系数 $T^{(AA)}_{kmnpq}$ 等为已知常数。通过求解线性方程组(5)，可确定广义位移 A^{k}_{mn}、C^{k}_{mn}，由此可求出位移场，将所得结果代回到几何方程以及物理方程，分别得到对称与反对称受力状态下的应变场和应力场，再与纯弯受力状态的求解结果相加，得到总的应变场与应力场。

2 给定损伤场时的接触问题分析

将文献[11]提出的损伤力学分析方法引入到层合梁的接触损伤分析中。假定：(1) 不计复合材料铺层损伤演化，只计层间介质损伤；(2) 略去胶层损伤演化的各向异性，视损伤变量为标量。某一胶层任意点的应变能密度表达式为

$$W(x,\bar{z}) = \frac{1}{2}\sigma^{(k_g)}_{ij}(x,\bar{z})\,\varepsilon^{(k_g)}_{ij}(x,\bar{z}) \tag{6}$$

式中：$\bar{z}$ 表示胶层沿厚度方向的平均尺寸，k_g 表示胶层的层序号(下同)。

由于胶层为各向同性材料，考虑损伤互耦的应力-应变关系表示为

$$\sigma^{(k_g)}_{ij}(x,\bar{z}) = C^{(k_g)}_{ijkl}[1 - D(x,\bar{z})]\varepsilon^{(k_g)}_{kl}(x,\bar{z}) \tag{7}$$

胶层任意一点的损伤驱动力可以由下式[11]得到：

$$Y(x,\bar{z}) = -\frac{\partial W(x,\bar{z})}{\partial D(x,\bar{z})} \tag{8}$$

将式(6)、式(7)代入式(8)，得到

$$Y(x,\bar{z}) = \frac{1}{2}C^{k_g}_{ijkl}\varepsilon^{k_g}_{ij}(x,\bar{z})\,\varepsilon^{k_g}_{kl}(x,\bar{z}) \tag{9}$$

根据文献[11]，单调加载时的损伤演化方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}D(x,\bar{z})}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} cY(x,\bar{z})^{p}\dfrac{\mathrm{d}Y(x,\bar{z})}{\mathrm{d}t}, & (Y(x,\bar{z}) > Y_{th}) \\ 0, & (Y(x,\bar{z}) \le Y_{th}) \end{cases} \tag{10}$$

式中：c、p 为非负材料常数，Y_{th} 为损伤门槛值。由式(10)积分可得

$$D(x,\bar{z}) = \begin{cases} \dfrac{c}{p+1}(Y(x,\bar{z})^{p+1} - Y_{th}^{p+1}), & (Y(x,\bar{z}) > Y_{th}) \\ 0, & (Y(x,\bar{z}) \le Y_{th}) \end{cases} \tag{11}$$

令

$$\sigma^{(k_g)\Delta}_{ij} = C^{(k_g)}_{ijkl}\varepsilon^{(k_g)}_{kl},\quad \sigma^{(k_g)D}_{ij} = -DC^{(k_g)}_{ijkl}\varepsilon^{(k_g)}_{kl} \tag{12}$$

于是，式(7)可写成

$$\sigma^{(k_g)}_{ij} = \sigma^{(k_g)\Delta}_{ij} + \sigma^{(k_g)D}_{ij} \tag{13}$$

胶层微元的平衡方程为

$$\frac{\partial\sigma^{(k_g)}_{ij}}{\partial x_j} + B_i = 0 \tag{14}$$

式中，B_i 为体力分量。

胶层在与其它层交界面上的应力边界条件为

$$\sigma^{(k_g)}_{ij}l_j = p_i \tag{15}$$

将式(13)代入式(14)和式(15)中，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma^{(k_g)\Delta}_{ij}}{\partial x_j} + B_i + B^{D}_{i} = 0\\ \sigma^{(k_g)\Delta}_{ij}l_j = p_i + p^{D}_{i}\end{aligned} \tag{16}$$

式中，B^{D}_{i}、p^{D}_{i} 分别为附加体力与附加面力，可表示为

$$B^{D}_{i} = \frac{\partial\sigma^{(k_g)D}_{ij}}{\partial x_j},\quad p^{D}_{i} = -\sigma^{(k_g)D}_{ij}l_j \tag{17}$$

由此，可以分别求出层合梁上半部分胶层和下半部分胶层的附加体力，并分别记为 $B^{(u)D}_{i}$ 和 $B^{(d)D}_{i}$(上标中的 D 表示与损伤相关)，以及层合梁上半部分胶层与其它层交界面上的附加面力和层合梁下半部分胶层与其它层交界面上的附加面力，分别记为 $p^{(u)D}_{i}$ 和 $p^{(d)D}_{i}$。

将附加体力和附加面力分别分解成对称与反对称部分

$$\begin{cases} B^{(s)D}_{i} = \dfrac{1}{2}(B^{(u)D}_{i} + B^{(d)D}_{i}) \\ B^{(a)D}_{i} = \dfrac{1}{2}(B^{(u)D}_{i} - B^{(d)D}_{i}) \\ p^{(s)D}_{i} = \dfrac{1}{2}(p^{(u)D}_{i} + p^{(d)D}_{i}) \\ p^{(a)D}_{i} = \dfrac{1}{2}(p^{(u)D}_{i} - p^{(d)D}_{i}) \end{cases} \tag{18}$$

式中：$B^{(s)D}_{i}$ 与 $p^{(s)D}_{i}$ 分别表示附加体力与附加面力的对称部分，$B^{(a)D}_{i}$ 与 $p^{(a)D}_{i}$ 分别表示附加体力与附加面力的反对称部分。

总势能泛函中，第 k 层和第 $k+1$ 层的交界面上位移和面力连续条件项为

$$J^{(k,k+1)} = \int_{S^*}[(u^{(k+1)} - u^{(k)})\tau^{(k)}_{xz} + (w^{(k+1)} - w^{(k)})\sigma^{(k)}_{z}]\mathrm{d}S^* + J^{(k_g,k_g+1)D} \tag{19}$$

式中

$$J^{(k_g,k_g+1)D} = \int_{S^*}[(u^{(k_g+1)} - u^{(k_g)})\tau^{(k_g)D}_{xz} + (w^{(k_g+1)} - w^{(k_g)})\sigma^{(k_g)D}_{z}]\mathrm{d}S^* \tag{20}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

根据分区广义势能原理，有

$$\Pi = \delta\left\{\sum_{k=1}^{k_{\max}}(U^k + J^{k,k+1}) + V\right\} = 0 \qquad (21)$$

由上式得到关于广义位移 A_{mn}^k、C_{mn}^k 的线性代数方程组

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k,p,q} T_{kmnpq}^{(AA)} A_{pq}^k + \sum_{k,p,q} T_{kmnpq}^{(AC)} C_{pq}^k = B_{kmn}^A \\ \sum_{k,p,q} T_{kmnpq}^{(CA)} A_{pq}^k + \sum_{k,p,q} T_{kmnpq}^{(CC)} C_{pq}^k = B_{kmn}^C\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

$$(k = 1,2,\cdots,k_{\max};\ m,p = 1,2,3,\cdots,M;\ n,q = 1,2,3,\cdots,N)$$

方程中的系数 $T_{kmnpq}^{(AA)}$ 等为已知常数。通过求解线性方程组(22)，可确定广义位移 A_{mn}^k、C_{mn}^k。由此可求出位移场，将所得结果代回到几何方程以及物理方程，分别得到对称与反对称受力状态下的应变场和应力场，再与纯弯受力状态的求解结果相加，得到考虑损伤时总的应变场与应力场。

3　接触损伤问题的分析步骤

当考虑损伤耦合效应时，原来线弹性情况下的应力-应变关系被考虑损伤互耦的非线性应力-应变关系所取代，直接求解会非常困难。为了克服这一困难，可以采用附加载荷法和迭代法。这两种方法的结合使用，一方面使得待解方程组为线性方程组，另一方面使得方程组左边刚度系数矩阵与无损伤情况下相同。

用迭代法与附加载荷法进行损伤分析的主要步骤为：

(1) 初始损伤场为零，根据已知的压头半径，由相应无损伤情况下载荷-接触区尺寸的关系函数确定接触区大小。然后得到无损伤层合梁接触问题的总应变场。

(2) 根据总应变场求出总附加载荷，并分解成对称和反对称两部分。

(3) 将附加载荷的对称和反对称部分分别加入到无损伤分析的对称状态和反对称状态分析中，其它参数保持不变，分别得到此时的对称与反对称状态下的应变场。然后利用功等效原则，将第 2 步中求得的附加载荷转化为压头对层合梁的附加压力。

(4) 将对称和反对称状态下分别求得的附加压力相加，得到总的附加压力，并根据得到的附加压力，利用无损伤分析时得到的载荷-接触区尺寸关系函数修正接触区尺寸。

(5) 在修正总压力相应的接触区尺寸后，再次求解无损伤状态的层合梁接触问题，并得到相应的应变场和损伤场。

(6) 重复以上步骤，并对得到的附加压力进行收敛性验证，如果收敛要求得到满足，则将得到的应变场与位移场结果输出，否则，重复以上计算，直到满足收敛要求为止。

下面，将给出以上步骤中(3)、(4)、(5)步骤内容。

3.1　等效附加压力的求解

在引入附加体力与附加面力后，给定损伤场的应力分析问题可以转化为无损伤的应力分析问题。即在第 1 步无损伤分析之后得到的损伤场下的损伤分析，只需在最初的无损伤分析的基础上，再加上附加载荷所做的外力功项，其它均保持与第 1 步无损伤分析时相同。这样转化之后，求解变得简单可行，但是，这种转化忽略了在考虑附加载荷后所造成的接触区的改变。因此，要进一步考虑附加载荷对接触区带来的变化，还需利用第 1 次转化之后的计算结果再进行一次接触区尺寸修正。接触区尺寸的修正可以通过求解附加载荷产生的等效附加压力，然后利用无损分析时得到的载荷-接触区尺寸函数关系得到新的接触区尺寸。

3.1.1　对称受力状态等效附加压力的求解

根据前面求解，可以得到考虑附加体力 $B_i^{(s)D}$ 与附加面力 $p_i^{(s)D}$ 时的外力势能表达式，以及位移和面力连续条件项中的附加项 $J^{(k_g,k_g+1)D}$。根据分区广义势能原理得到关于广义位移的线性方程组

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k,p,q} T_{kmnpq}^{(AA)} A_{pq}^k + \sum_{k,p,q} T_{kmnpq}^{(AC)} C_{pq}^k = B_{kmn}^A \\ \sum_{k,p,q} T_{kmnpq}^{(CA)} A_{pq}^k + \sum_{k,p,q} T_{kmnpq}^{(CC)} C_{pq}^k = B_{kmn}^C\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

$$(k = 1,2,\cdots,k_{\max};\ m,p = 1,2,3,\cdots,M;\ n,q = 1,2,3,\cdots,N)$$

方程(23)中左边项系数与无损伤情况时得到的方程(式(5))左边项系数相同。

然后按式(23)求得的位移场，可以求出附加体力及附加面力产生的总外力势能，与位移和面力连续条件项中的附加项 $J^{(k_g,k_g+1)D}$ 之和

$$V^D = -2\int_{l/2}^{l/2} B_x^{(s)D} u_{mn}^{k_g}(x,\bar{z})\,dx - 2\int_{l/2}^{l/2} B_z^{(s)D} w_{mn}^{k_g}(x,\bar{z})\,dx - 2\int_{l/2}^{l/2} p_x^{(s)D} u_{mn}^{k_g}(x,z_{k_g})\,dx -$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$2\int_{-L/2}^{L/2} p_z^{(s)D} w_{mn}^{k_g}(x, z_{k_g})\,dx - 2\int_{-L/2}^{L/2} p_x^{(s)D} u_{mn}^{k_g}(x, z_{k_g-1})\,dx - 2\int_{-L/2}^{L/2} p_z^{(s)D} w_{mn}^{k_g}(x, z_{k_g-1})\,dx - J^{(k_g, k_g+1)D} \quad (24)$$

压力载荷 P 产生的外力势能为

$$V^P = -2\int_{-a}^{a} \frac{P}{2\dfrac{a[1-(-1)^{\bar{m}}+2\bar{m}]}{1+\bar{m}}} \times \left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^{\bar{m}}\right] w^{(k_{\max})}(x, h)\,dx \quad (25)$$

故可以得到对称受力状态的等效附加压力为

$$P_{eq}^{(s)} = \frac{V^D}{V^P/P} \quad (26)$$

3.1.2 反对称状态等效附加压力的求解

按照 3.1.1 中的求解步骤，在原求解无损伤问题时反对称受力状态的分析中，增加附加体力及附加面力的反对称部分 $B_i^{(a)D}$ 与 $p_i^{(a)D}$，以及位移和面力连续条件项中的附加项 $J^{(k_g, k_g+1)D}$。只需在原线性方程组中修改外力势能的变分部分，求解新的线性代数方程组，得到广义位移，并进一步求得位移场，然后利用功等效原则得到反对称受力状态下的等效附加压力 $P_{eq}^{(a)}$。

3.2 接触区尺寸修正

由前一节的计算，得到总等效附加压力为

$$P_{eq}^{D} = P_{eq}^{(s)} + P_{eq}^{(a)} \quad (27)$$

采用附加载荷法，考虑损伤的层合梁接触问题转化为无损伤情况下考虑附加压力的层合梁接触问题。此时总外载荷变为

$$P_{eq} = P_{eq}^{D} + P \quad (28)$$

然后，根据无损伤情况下的载荷-接触区尺寸关系函数，即可得到考虑附加压力后的新接触区。

3.3 考虑附加压力并修正接触区后的问题求解

通过以上步骤，考虑损伤的层合梁接触问题已转化为考虑附加压力以及修正接触区尺寸后的无损伤层合梁接触问题。求解完并得到层合梁总应变场及损伤场后，对等效附加压力进行收敛性验证，直到等效附加压力满足收敛要求，并将这一解答作为损伤分析的最终解答。

4 算 例

为了验证上述方法的可行性，给出一算例：层合梁单层为正交各向异性材料。其材料常数为：$E_1 = E_0$，$E_2 = 0.1E_0$，$G_{12} = 0.035E_0$，$\mu_{12} = \mu_{23} = 0.3$。层合梁的长、高以及厚度分别为 $L = 50h$，$H = 2h$，$B = 0.4h$。层合梁结构关于 x 轴和 y 轴对称，复合材料层的铺层角为[0°/90°/0°]，相应的每一层厚度分别为 $0.4875h/0.9750h/0.4875h$。

胶层材料视为各向同性材料，其材料常数为：$E_g = 0.021E_0$，$\mu_g = 0.30$，每一胶层厚度为 $0.025h$。

压头半径为 $r = 10h$，压头对层合梁的压力为 $P = 0.28E-3E_0h^2$。

4.1 无损情况下载荷-接触区尺寸关系的确定

按照文献[10]的分析方法，首先，每给定一个接触区半宽 a 和总外载荷 P，可解得相应的载荷分布指数 $\bar{m}$ 以及相应的压头曲率 κ。又由于在给定的接触区尺寸下，压头曲率 κ 与总外载荷 P 成正比，故可以很方便地得到在每个给定接触区尺寸以及真实的压头曲率(例如在本算例中压头曲率为 $h/10$)下的外载荷，即可以得到真实压头曲率下的一系列载荷-接触区尺寸的对应数据点。然后根据这些数据点，应用最小二乘曲线拟合的方法得到真实压头曲率下的外载荷与接触区尺寸的关系表达式。

设已经求得 m 个数据点 (P_i, a_i) $(i = 1, 2, 3, \cdots, m)$，可求出 $(m-1)$ 次最小二乘拟合多项式

$$a_m(P) = t_1 + t_2P + t_3P^2 + \cdots + t_mP^{m-1} \quad (29)$$

式中：t_i 为待定常数，P 为外载荷，$a_m(P)$ 为根据给定载荷得到的接触区尺寸。

在实际编程计算中，为了防止运算溢出，P_i 用

$$P_i' = P_i - \bar{P} \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \quad (30)$$

代替。上式中

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^{n} P_i/n \quad (31)$$

此时，拟合多项式的形式为

$$a_m(P) = t_1 + t_2(P-\bar{P}) + t_3(P-\bar{P})^2 + \cdots + t_m(P-\bar{P})^{m-1} \quad (32)$$

4.2 胶层损伤演化参数的确定

胶层的损伤演化特性属于胶层本身的属性，可以根据某一种情况下的实验结果来确定胶层的损伤演化参数。本文中，根据胶层的纯剪切疲劳实验曲线确定损伤演化参数。

因为实际加载情况为从零载荷开始到最大载荷的单调加载，所以研究每一个加载循环周期为单调加载与单调卸载的重复加载情况。对式(10)进行积分，且不考虑卸载对损伤演化的影响，可以得到一个加载循环内的损伤增量

$$\frac{\delta D}{\delta N} = \frac{c}{p+1}(Y_M^{p+1} - Y_{th}^{p+1}) \quad (33)$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

上式中，Y_M 表示载荷最大时所对应的损伤驱动力。

若对于式(33)，不考虑损伤门槛值，则有

$$\frac{\delta N}{\delta D} = \frac{p+1}{c}\frac{1}{Y_M^{p+1}} \tag{34}$$

将式(34)积分，得到

$$N = \int_0^1 \frac{p+1}{c}\frac{1}{Y_M^{p+1}}\mathrm{d}D = \frac{p+1}{c}\frac{1}{Y_M^{p+1}} \tag{35}$$

对式(35)两边取对数，得到

$$\lg N = \lg \alpha + (p+1)\lg Y_M \tag{36}$$

式中，$\alpha = \frac{p+1}{c}$。

以文献[13]中图 2-2 所示的疲劳曲线作为参考曲线，并把计算结果作为胶层的真实损伤演化参数。首先由疲劳曲线，可以得到表 1 数据。根据表 1 数据，可以得到图 3 疲劳曲线及其拟合直线。

由图 3 即可得出

$$\bar{\alpha} = \frac{p+1}{\bar{c}} = 10^{-40.1833},\ p+1 = 8.04218 \tag{37}$$

式中，$\bar{c} = cE_0^{p+1}$。进一步解得

$$\bar{c} = 1.22652 \times 10^{41},\ p = 7.04218$$

由上述损伤演化参数，即可得到损伤门槛值

$$\bar{Y}_{th} = \frac{Y_{th}}{E_0} = 10^{-5.86698} \tag{38}$$

4.3　计算结果

根据以上数据，并采用附加载荷法与迭代法进行计算，得到下表 2 结果。

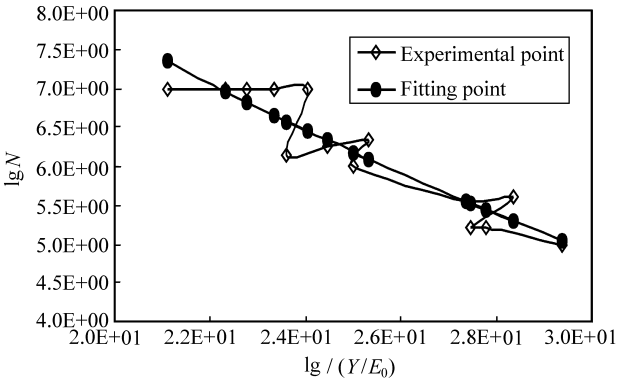


图 3　胶层疲劳性能试验曲线及拟合直线

Fig. 3　Curve fitting to the fatigue curve of glue layer

由表 2 进一步可以得到层合梁胶层内的损伤分布以及应力分布，见图 4。

从以上计算结果可以看出，本算例中，层合梁在靠近受载面一侧胶层的应力要大于另一侧，从而其损伤程度也要大于另一侧。

5　结　论

本文作者在层合梁无损伤接触问题分析的基础上，进一步利用损伤力学分析方法对层合梁接触损伤问题进行了分析。在具体分析过程中使用了附加载荷法与迭代法，计算结果显示，这种方法收敛性好，而且求解简单。本方法还可以进一步推广到层合板的接触损伤分析中。

表 1　胶层纯剪切疲劳试验数据

Table 1　Pure shearing fatigue data of glue layer

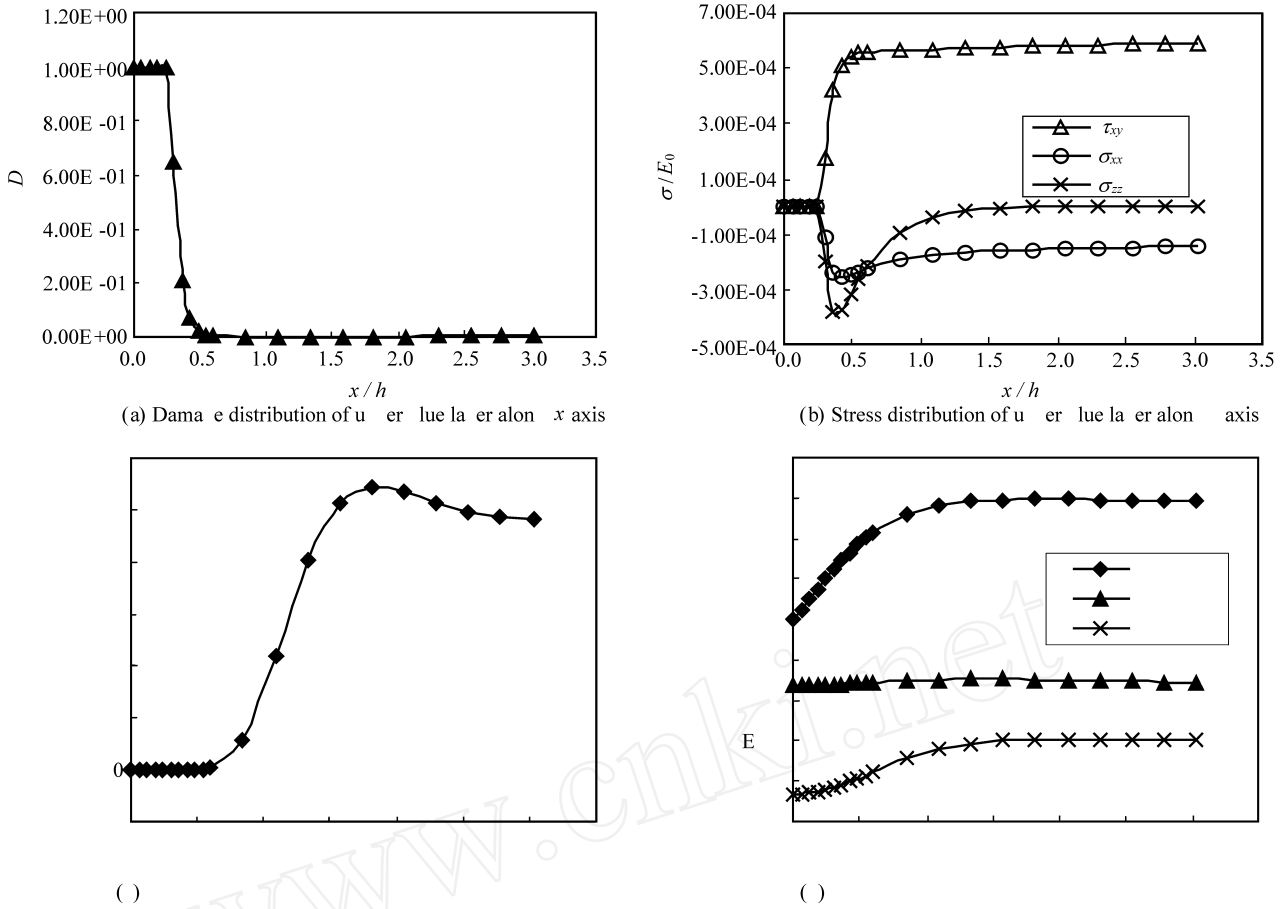
τ/E_0	1.40741E-4	1.48889E-4	1.51852E-4	1.55555E-4	1.60371E-4	1.57407E-4	1.62963E-4
$\lg(Y/E_0)$	-5.91144	-5.86256	-5.84544	-5.82451	-5.79803	-5.81423	-5.78410
$\lg N$	7.00000	7.00000	7.00000	7.00000	7.00000	6.14286	6.26286
τ/E_0	1.68889E-4	1.66667E-4	1.82407E-4	1.88889E-4	1.82963E-4	1.85185E-4	1.95741E-4
$\lg(Y/E_0)$	-5.75308	-5.76458	-5.68620	-5.65587	-5.68356	-5.67307	-5.62492
$\lg N$	6.32857	6.00000	5.55714	5.60000	5.20000	5.20000	5.00000

表 2　迭代法的收敛性验证

Table 2　The convergence testing for iteration

No.	P_{eq}^D	$w(0,0,h)/h$	$\sigma_x(0,0,z_{k_g})/E_0$	$\sigma_z(0,0,z_{k_g})/E_0$
1	2.800000E-04	-0.558031E-01	-0.553342E-02	-0.137929E-02
2	3.025478E-04	-0.644779E-01	-0.584588E-02	-0.142282E-02
3	3.535815E-04	-0.868372E-01	-0.655881E-02	-0.151144E-02
4	3.756093E-04	-0.977158E-01	-0.687038E-02	-0.154594E-02
5	3.785949E-04	-0.992496E-01	-0.691284E-02	-0.155045E-02
6	3.789627E-04	-0.994395E-01	-0.691807E-02	-0.155100E-02

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net



(a) Dama e distribution of u er lue la er alon x axis

(b) Stress distribution of u er lue la er alon axis

( )

( )

图 4 层合梁胶层内的损伤分布以及应力分布

Fig. 4 Damage and stress distribution in glue layer of composite beam

参考文献:

[1] Hertz H. On the contact of elastic solids [J]. *Journal f ü r die Reine und Angewandte Mathematic*, 1882, 92: 156 - 171.

[2] 钟万勰, 张洪武, 吴承伟. 参变量变分原理及其在工程中的应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1997. 194 - 293.

[3] Keer L M, Miller G R. Smooth indentation of a finite layer [J]. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 1983, 109: 706 - 717.

[4] Sankar B V. Smooth indentation of orthotropic beams [J]. *Composites Science and Technology*, 1989, 34: 95 - 111.

[5] Cairns D S, Lagace P A. Thick composite plates subjected to Lateral loading [J]. *ASME J of Appl Mech*, 1987, 54: 611 - 615.

[6] Wu E B, Yen C S. The contact behavior between laminated composite plates and rigid spheres [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1994, 61: 60 - 66.

[7] Ford C, Bush M B, Hu X Z. A numerical study of contact damage and stress phenomena in curved porcelain/glass-filled polymer bilayers [J]. *Composites Science and Technology*, 2004, 64: 2207 - 2212.

[8] Selvadurai A P S. Stationary damage modeling of poroelastic contact [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, 41: 2043 - 2064.

[9] Ge D, Domnich V, Juliano T, *et al*. Structural damage in boron carbide under contact loading [J]. *Acta Materialia*, 2004, 52: 3921 - 3927.

[10] 胡伟平, 孟庆春, 张 行. 复合材料层合梁接触问题的线性化与能量解法 [J]. 复合材料学报, 2001, 18(3): 124 - 132.
Hu W P, Meng Q C, Zhang X. The linearization and energy method about contact problem of composite beam [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2001, 18(3): 124 - 132.

[11] 张 行, 赵 军. 金属构件应用疲劳损伤力学 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1998. 12 - 29; 151 - 155.

[12] 张 行. 高等弹性理论 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1994. 241 - 264.

[13] 工程材料实用手册编辑委员会. 工程材料实用手册(5) [M], 北京: 中国标准出版社, 1992. 397.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net