第 16 卷 第 4 期 复 合 材 料 学 报 Vol 16 No. 4
1999 年 10 月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA October 1999

热释电材料层合板柱形弯曲解析解

刘 鸣 李子然 吴长春
(中国科学技术大学 力学与机械工程系, 合肥 230026)

摘 要 由热机电耦合微分方程出发, 用富里叶级数展开方法, 探讨了含有热释电材料铺层的复合材料层合板的柱形弯曲问题。由于不作任何简化, 所得结果为精确解且适用于任何厚跨比的层合板分析。用复指数形式, 使公式推导简洁统一且极大方便了程序实施。分析中考虑了各种可能的热学、力学和静电学边界条件, 对各种耦合元素相互关系和各自特点进行了分析, 发现结构对热载荷与电载荷的响应有明显的不同。

关键词 热释电材料, 柱形弯曲, 富里叶级数
中图分类号 TB39; O343.2

压电材料是一类具有机电耦合性质的特殊材料[1]。将其附加在传统的复合材料层合结构中, 利用其特有的耦合性质, 可以方便地测量和控制结构的变形及应力分布。因此这类结构又被称为智能结构。在实际结构中, 又以层合板的应用更具代表性。利用富里叶级数的方法, Ray 等分析了压电材料单层板及层合板的柱形弯曲问题[2,3], Heyliger[4]、Ray 等[5]对四边简支的叠层板作了分析。利用状态空间理论, Lee[6], 陈等[7]给出了四边简支单层压电材料板在机电载荷作用下的变形和应力。

热释电材料是一类特殊的压电材料, 具有热机电耦合的本构关系。由于它固有的各向异性以及复杂的耦合关系, 使得分析非常复杂。然而, 也正是由于这种更加多元化的耦合关系, 使得它的应用愈加具有潜力。但到目前为止, 对这一类结构的研究相对较少, 还不能满足工程实际和理论分析的需要。Xu 等[8]采用状态空间方法分析了含有热释电材料铺层的复合材料层合板四边简支下的静力响应。利用富里叶级数方法, Dube 等[9]分析了热释电材料单层板的柱形弯曲问题, 对于相应层合板的分析, 因为要同时求解耦合和非耦合方程, 以及层间条件的引入, 使问题更加复杂, 本文的工作就是为了填补这一空缺。

本文作者直接从微分方程出发, 将位移、电势和温度变化展开成富里叶级数以精确满足简支边界条件, 并利用层间连续条件和上下表面的边值条件来确定待定系数。由于热学量和电学量的引入, 使得边界条件十分复杂, 文中考虑了各种可能的热学、力学和静电学边界条件模型, 是以前工作中所未涉及的。本文为系统分析此类结构中各种耦合元素的相互影响提供了理论数据。通过对计算结果的分析, 发现电载荷和热载荷对结构有显著不同的影响, 而且耦合将会导致与纯弹性情况不同性质的响应。

收修改稿、初稿日期: 1998-02-28, 1998-01-21
国家自然科学基金资助项目(19772051)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

1　控制方程

图 1 表示一层合板的柱形弯曲问题。x 方向宽为 L, 两端简支, y 方向无限长。从下到上每层的厚度依次为 b_i ($i = 1, 2, \cdots, N$), 共有 N 层, 总厚度 $H = \sum_{i=1}^{N} b_i$。

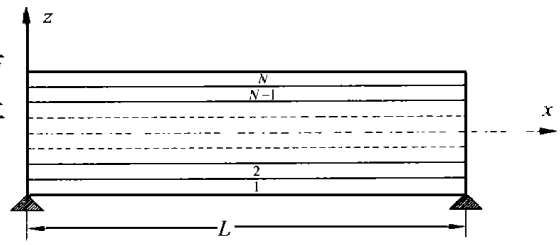

图 1　层合板的柱形弯曲问题

Fig. 1　Cylindrical bending of laminated plates

文中热释电材料和纤维增强复合材料分别选取 2 mm 晶系本构模型和正交各向异性本构模型[1]。对于柱形弯曲问题, 考虑到 y 方向的对称性, 所以在该方向上位移以及各场量的导数均为零。于是, 对于任一铺层, 本构方程可以统一表示为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x^{(k)} &= c_{11}^{(k)} u_{,x}^{(k)} + c_{13}^{(k)} w_{,z}^{(k)} + e_{31}^{(k)} \phi_{,z}^{(k)} - \lambda_1^{(k)} \theta^{(k)} \\
\sigma_y^{(k)} &= c_{12}^{(k)} u_{,x}^{(k)} + c_{23}^{(k)} w_{,z}^{(k)} + e_{32}^{(k)} \phi_{,z}^{(k)} - \lambda_2^{(k)} \theta^{(k)} \\
\sigma_z^{(k)} &= c_{13}^{(k)} u_{,x}^{(k)} + c_{13}^{(k)} w_{,z}^{(k)} + e_{33}^{(k)} \phi_{,z}^{(k)} - \lambda_3^{(k)} \theta^{(k)} \\
\tau_{xz}^{(k)} &= c_{55}^{(k)} (u_{,z}^{(k)} + w_{,x}^{(k)}) + e_{15}^{(k)} \phi_{,x}^{(k)} \\
D_x^{(k)} &= e_{15}^{(k)} (u_{,z}^{(k)} + w_{,x}^{(k)}) - \epsilon_{11}^{(k)} \phi_{,x}^{(k)} \\
D_z^{(k)} &= e_{31}^{(k)} u_{,x}^{(k)} + e_{33}^{(k)} w_{,z}^{(k)} - \epsilon_{33}^{(k)} \phi_{,z}^{(k)} + r_3^{(k)} \theta^{(k)}
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中: 上标 (k) 表示第 k ($k = 1, 2, \cdots, N$) 层; $u = u(x, z)$, $w = w(x, z)$ 分别表示 x 和 z 方向的位移分量; $\phi = \phi(x, z)$ 表示电势函数; $\theta = \theta(x, z)$ 表示温度变化; 其中 z ($< -b_k/2 \le z \le b_k/2$) 为局部坐标; σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xz} 表示非零应力分量; D_x, D_z 表示非零电位移分量; c_{ij} 为弹性常数; e_{ij} 为压电常数; ϵ_j 为介电常数; r_i 为热电常数, λ_i 为应力温度系数。对于纤维增强复合材料, 所有压电常数和热电常数为零。

如果忽略体力、体电荷和内热源, 平衡方程、高斯方程和热传导方程可分别表示为

$$\sigma_{x,x}^{(k)} + \tau_{xz,z}^{(k)} = 0, \qquad \tau_{xz,x}^{(k)} + \sigma_{z,z}^{(k)} = 0 \tag{2a}$$

$$D_{x,x}^{(k)} + D_{z,z}^{(k)} = 0, \qquad \kappa_{11}^{(k)} \theta_{,xx}^{(k)} + \kappa_{33}^{(k)} \theta_{,zz}^{(k)} = 0 \tag{2b, 2c}$$

其中: 下标中撇号表示对变量求偏导数, κ_{ij} 为热传导系数。

复层板的层间连续条件可以表示为

$$u^{(k)}\left(x, \frac{b_k}{2}\right) = u^{(k+1)}\left(x, -\frac{b_{k+1}}{2}\right), \qquad w^{(k)}\left(x, \frac{b_k}{2}\right) = w^{(k+1)}\left(x, -\frac{b_{k+1}}{2}\right),$$

$$\sigma_z^{(k)}\left(x, \frac{b_k}{2}\right) = \sigma_z^{(k+1)}\left(x, -\frac{b_{k+1}}{2}\right), \qquad \tau_{xz}^{(k)}\left(x, \frac{b_k}{2}\right) = \tau_{xz}^{(k+1)}\left(x, -\frac{b_{k+1}}{2}\right) \tag{3a}$$

$$\phi^{(k)}\left(x, \frac{b_k}{2}\right) = \phi^{(k+1)}\left(x, -\frac{b_{k+1}}{2}\right), \qquad D_z^{(k)}\left(x, \frac{b_k}{2}\right) = D_z^{(k+1)}\left(x, -\frac{b_{k+1}}{2}\right) \tag{3b}$$

$$\theta^{(k)}\left(x, \frac{b_k}{2}\right) = \theta^{(k+1)}\left(x, -\frac{b_{k+1}}{2}\right), \qquad h_z^{(k)}\left(x, \frac{b_k}{2}\right) = h_z^{(k+1)}\left(x, -\frac{b_{k+1}}{2}\right) \tag{3c}$$

$$k = 1, 2, \cdots, N - 1$$

其中: h_x, h_z 表示非零热流量分量, 满足关系

$$h_x^{(k)} = -\kappa_{11}^{(k)} \theta_{,x}^{(k)}, \qquad h_z^{(k)} = -\kappa_{33}^{(k)} \theta_{,z}^{(k)} \tag{4}$$

由于热传导方程和高斯方程的引入, 使得边界条件复杂化, 多样化。在本节的最后, 作者力求尽可能全面地考虑现有的各种边界模型。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

在 $x = 0, L$ 处为简支边界, 可表示为

$$w^{(k)} = 0,\quad \sigma_x^{(k)} = 0,\quad \phi^{(k)} = 0,\quad \theta^{(k)} = 0 \qquad k = 1, 2, \cdots, N \tag{5}$$

上下表面的边界条件为

力学边界条件:
$$\sigma_z^{(i)}\left(x, \pm\frac{b_i}{2}\right) = \bar{\sigma}_i(x), \qquad \tau_{xz}^{(i)}\left(x, \pm\frac{b_i}{2}\right) = \bar{\tau}_i(x) \tag{6a}$$

电学边界条件:

电势边界, $\phi^{(i)}\left(x, \pm\frac{b_i}{2}\right) = \bar{\phi}_i(x)$; 或, 电位移边界, $D_z^{(i)}\left(x, \pm\frac{b_i}{2}\right) = \bar{D}_i(x)$ (6b)

热学边界条件:

温度边界, $\theta^{(i)}\left(x, \pm\frac{b_i}{2}\right) = \bar{\theta}_i(x)$; 或, 热传导边界, $h_z^{(i)}\left(x, \pm\frac{b_i}{2}\right) = \bar{h}_i(x)$

或, 对流辐射边界, $\pm\theta_{,z}^{(i)}\left(x, \pm\frac{b_i}{2}\right) = \gamma_i\left[\bar{\theta}_i(x) - \theta^{(i)}\left(x, \pm\frac{b_i}{2}\right)\right]$ (6c)

其中, $i = 1, N$。当 $i = 1$ 时取"-"号, 对应于下表面边条; 当 $i = N$ 时取"+"号, 对应于上表面边条, γ 为放热系数, 上划线表示是已知函数。

2 级数求解

将第 k 层内的位移、电势和温度变化展开为级数形式

$$u^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(k)}(z)\cos(a_m x) \tag{7}$$

$$(w^{(k)}, \phi^{(k)}, \theta^{(k)})^{\mathrm{T}} = \sum_{m=1}^{\infty}\left[w_m^{(k)}(z), \phi_m^{(k)}(z), \theta_n^{(k)}(z)\right]^{\mathrm{T}}\sin(a_m x) \tag{8}$$

其中, $\alpha_n = m\pi/L$, 上标 T 表示对向量求转置。可以证明, 式(7)、(8)满足简支边界条件(5)。同时, 将上下表面边界条件也相应地展开成级数形式

$$\bar{\sigma}_i(x) = \sum_m \bar{\sigma}_{im}\sin(a_m x) \quad \text{and} \quad \bar{\tau}_i(x) = \sum_m \bar{\tau}_{im}\cos(a_m x) \tag{9a}$$

$$\bar{\phi}_i(x) = \sum_m \bar{\phi}_{im}\sin(a_m x) \quad \text{or} \quad \bar{D}_i(x) = \sum_m \bar{D}_{im}\sin(a_m x) \tag{9b}$$

$$\bar{\theta}_i(x) = \sum_m \bar{\theta}_{im}\sin(a_m x) \quad \text{or} \quad \bar{h}_i(x) = \sum_m \bar{h}_{im}\sin(a_m x) \tag{9c}$$

由方程(2c)、(3c)、(6c)可以看到, 温度变化 θ 独立于位移 u, w 和电势函数 ϕ。也就是说, θ 可以独立求得, 与位移和电势无关, 但反之不成立。

将(8)式中 $\theta^{(k)}$ 的表达式代入热传导方程(2c), 由于热传导系数大于零, 有

$$\theta_n^{(k)''} - \mu_m^{(k)}\theta_n^{(k)} = 0, \qquad \mu_m^{(k)} = a_m\left[\frac{K_{11}^{(k)}}{K_{33}^{(k)}}\right]^{1/2} \tag{10}$$

于是, 可以求得

$$\theta_n^{(k)} = A_m^{(k)} e^{\mu_m^{(k)} z} + B_m^{(k)} e^{-\mu_m^{(k)} z} \qquad (k = 1, 2, \cdots, N) \tag{11}$$

这里, $A_m^{(k)}$, $B_m^{(k)}$ 为待定系数。由层间连续条件(3c)以及上下表面边界条件(6c), 对于每一个 m 可得 $2N$ 个独立方程, 联立可求得 $A_m^{(k)}$, $B_m^{(k)}$。

下面求解位移场和电势场, 近一步设

$$\left\{u_m^{(k)}, w_m^{(k)}, \phi_m^{(k)}\right\}^{\mathrm{T}} = \left\{f_{1m}^{(k)}, f_{2m}^{(k)}, f_{3m}^{(k)}\right\}^{\mathrm{T}} e^{\rho_m^{(k)} z} \tag{12}$$

其中, $\mathrm{f}_m^{(k)} = \left\{f_{1m}^{(k)}, f_{2m}^{(k)}, f_{3m}^{(k)}\right\}^{\mathrm{T}}$ 为待定系数。代入式(7)、(8)、(2a)、(2b)可得到

$$\mathrm{G}(\rho_m^{(k)})\,\mathrm{f}_m^{(k)} = \mathrm{T}_m^{(k)} \tag{13}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中, $T_m^{(k)} = \left\{ a_m \lambda_1^{(k)} \theta_n^{(k)} \quad \lambda_3^{(k)} \theta_n^{(k)} \quad - r_3^{(k)} \theta_n^{(k)} \right\}^T$

$$G(\rho_m^{(k)}) = \begin{bmatrix} \rho_m^{(k)2} c_{55}^{(k)} - a_m^2 c_{11}^{(k)} & a_m \rho_m^{(k)} (c_{13}^{(k)} + c_{55}^{(k)}) & a_m \rho_m^{(k)} (e_{31}^{(k)} + e_{15}^{(k)}) \\ - a_m \rho_m^{(k)} (c_{13}^{(k)} + c_{55}^{(k)}) & \rho_m^{(k)2} c_{33}^{(k)} - a_m^2 c_{55}^{(k)} & \rho_m^{(k)2} e_{33}^{(k)} - a_m^2 e_{15}^{(k)} \\ - a_m \rho_m^{(k)} (e_{31}^{(k)} + e_{15}^{(k)}) & \rho_m^{(k)2} e_{33}^{(k)} - a_m^2 e_{15}^{(k)} & - \rho_m^{(k)2} \epsilon_{33}^{(k)} + a_m^2 \epsilon_{11}^{(k)} \end{bmatrix}$$

(13) 式有特解

$$\left\{ u_m^{(k)*}, w_m^{(k)*}, \phi_m^{(k)*} \right\}^T = G(\mu_m^{(k)})^{-1} P(\mu_m^{(k)}) A_m e^{\mu_m^{(k)} z} + G(-\mu_m^{(k)})^{-1} P(-\mu_m^{(k)}) B_m e^{-\mu_m^{(k)} z} \tag{14}$$

式中, $P(\mu_m^{(k)}) = \left\{ \lambda_1^{(k)} a_m \quad \lambda_3^{(k)} \mu_m^{(k)} \quad - r_3^{(k)} \mu_m^{(k)} \right\}^T$

对热释电材料, (13) 式的通解对应于齐次方程组

$$G(\rho_m^{(k)}) f_m^{(k)} = \mathbf{0} \tag{15}$$

为使齐次方程(15) 有非平凡解, 应有系数行列式为零, 即

$$\left| G(\rho_m^{(k)}) \right| = 0 \tag{16}$$

(16) 式是关于参数 $\rho_m^{(k)}$ 的六次方程, 求解可得三对共轭复根。统一记为

$$\rho_{jm}^{(k)} = \alpha_{jm}^{(k)} + i\beta_{jm}^{(k)} \qquad (j = 1, 2, \cdots, 6)$$

其中, $\alpha_{jm}^{(k)}$, $\beta_{jm}^{(k)}$ 分别为实部和虚部。为了便于推导和编程, 将通解表示成复指数形式, 所以有

$$\left\{ u_m^{(k)0}, w_m^{(k)0}, \phi_m^{(k)0} \right\}^T = \sum_{j=1}^{6} \left\{ f_{1jm}^{(k)}, f_{2jm}^{(k)}, f_{3jm}^{(k)} \right\}^T e^{\rho_{jm}^{(k)} z} \tag{17}$$

又由齐次方程(15) 后两式可得,

$$\begin{Bmatrix} f_{2jm}^{(k)} \\ f_{3jm}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{33}^{(k)} \rho_{jm}^{(k)2} - c_{55}^{(k)} a_m^2 & e_{33}^{(k)} \rho_{jm}^{(k)2} - e_{15}^{(k)} a_m^2 \\ e_{33}^{(k)} \rho_{jm}^{(k)2} - e_{15}^{(k)} a_m^2 & \epsilon_{11}^{(k)} a_m^2 - \epsilon_{33}^{(k)} \rho_{jm}^{(k)2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \rho_{jm}^{(k)} a_m (c_{55}^{(k)} + c_{13}^{(k)}) \\ \rho_{jm}^{(k)} a_m (e_{15}^{(k)} + e_{31}^{(k)}) \end{Bmatrix} f_{1jm}^{(k)} = \begin{Bmatrix} q_{1jm}^{(k)} \\ q_{2jm}^{(k)} \end{Bmatrix} f_{1jm}^{(k)} \tag{18}$$

最后有

$$\begin{Bmatrix} u_m^{(k)0} \\ w_m^{(k)0} \\ \phi_m^{(k)0} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{6} e^{\alpha_{jm}^{(k)} z} \begin{bmatrix} \cos(\beta_{jm}^{(k)} z) + \sin(\beta_{jm}^{(k)} z) \\ [\mathrm{Re}(q_{1jm}^{(k)}) + \mathrm{Im}(q_{1jm}^{(k)})]\cos(\beta_{jm}^{(k)} z) + [\mathrm{Re}(q_{1jm}^{(k)}) - \mathrm{Im}(q_{1jm}^{(k)})]\sin(\beta_{jm}^{(k)} z) \\ [\mathrm{Re}(q_{2jm}^{(k)}) + \mathrm{Im}(q_{2jm}^{(k)})]\cos(\beta_{jm}^{(k)} z) + [\mathrm{Re}(q_{2jm}^{(k)}) - \mathrm{Im}(q_{2jm}^{(k)})]\sin(\beta_{jm}^{(k)} z) \end{bmatrix} f_{1jm}^{(k)} \tag{19}$$

(19) 式中, $f_{1jm}^{(k)}$ $(j = 1, 2, \cdots, 6)$ 为待定系数, Re 表示取实部, Im 表示取虚部。

$$\left\{ u_m^{(k)}, w_m^{(k)}, \phi_m^{(k)} \right\}^T = \left\{ u_m^{(k)*}, w_m^{(k)*}, \phi_m^{(k)*} \right\}^T + \left\{ u_m^{(k)0}, w_m^{(k)0}, \phi_m^{(k)0} \right\}^T \tag{20}$$

于是, 对于 N 层板, 每一项级数(每个 m), 共有 $6N$ 个待定系数。利用层间连续条件(3a)、(3b) 和上下表面边值条件(6a)、(6b), 对每个 m 都有 $6N$ 个独立方程, 这样, 便可求得 $\left\{ u_m^{(k)}, w_m^{(k)}, \phi_m^{(k)} \right\}^T$。

3 算　　例

以下将具体分析一含有热释电材料铺层的五层复合材料层合板。其中, 最上层和最下层取热释电材料 PZT-5A, 中间三层取纤维增强复合材料, 材料常数见文献[8]中的表 2。每层厚度均为 20 mm, 取 0°/90°/0°/0° 对称铺设。计算中, 取三种不同的宽度 L, 分别得到了跨厚比 $s = L/H = 2, 4, 10$ 情况下的结果。

考虑到分析各种耦合元素相互关系的需要, 文中设计了三种不同加载情况下的算例: (1) 机械加载; (2) 机、电加载; (3) 机械和热加载。在所有算例中, 载荷均只取一项级数, 即只考虑 $m = 1$ 的情况。以下将具体给出载荷的值。

算例 1(机械加载):

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

下表面(温度边界)

$$\bar{\sigma}_1 = 0,\quad \bar{\tau}_1 = 0,\quad \bar{\phi}_1 = 0,\quad \bar{\theta}_1 = 0$$

上表面(温度边界)

$$\bar{\sigma}_1 = 1.0,\quad \bar{\tau}_1 = 0,\quad \bar{\phi}_1 = 0,\quad \bar{\theta}_1 = 0$$

算例 2(机电加载):

下表面(温度边界)

$$\bar{\sigma}_1 = 0,\quad \bar{\tau}_1 = 0,\quad \bar{D}_1 = 0,\quad \bar{\theta}_1 = 0$$

上表面(温度边界)

$$\bar{\sigma}_1 = 1.0,\quad \bar{\tau}_1 = 0,\quad \bar{\phi}_1 = 1.0,\quad \bar{\theta}_1 = 0$$

算例 3(机械温度加载):

下表面(温度边界)

$$\bar{\sigma}_1 = 0,\quad \bar{\tau}_1 = 0,\quad \bar{\phi}_1 = 0,\quad \bar{\theta}_1 = 0$$

上表面

$$\bar{\sigma}_1 = 1.0,\quad \bar{\tau}_1 = 0,\quad \bar{\phi}_1 = 0,\quad \bar{h}_{z1} = 1.0$$

图 2 给出了在单纯机械弯曲载荷(算例 1)作用下位移分布和应力分布的结果。可以看到,变形和应力分布对应于一般弹性材料复层板的纯弯曲情况。在相同的边界和载荷条件下,厚板的变形和应力相对薄板都较小,从而可以得到厚板结构会更加安全的结论。然而由下面的讨论将会看到,如果施加耦合荷载,情况就不一定是这样的了。

图 3、图 4 分别给出了在机电载荷(算例 2),热机载荷(算例 3)作用下的变形和应力沿厚度的分布曲线。由图 3 和图 4 可以看到,电载荷和温度载荷会不同程度地在各层内引入拉伸或压缩的面内位移和面内应力。由各图中面内正应力的分布曲线可看到,因为热释电材料和普通复合材料在材料特性上的差别,在热和电荷载下,面内正应力在相应的界面上将会产生非常大的阶跃。

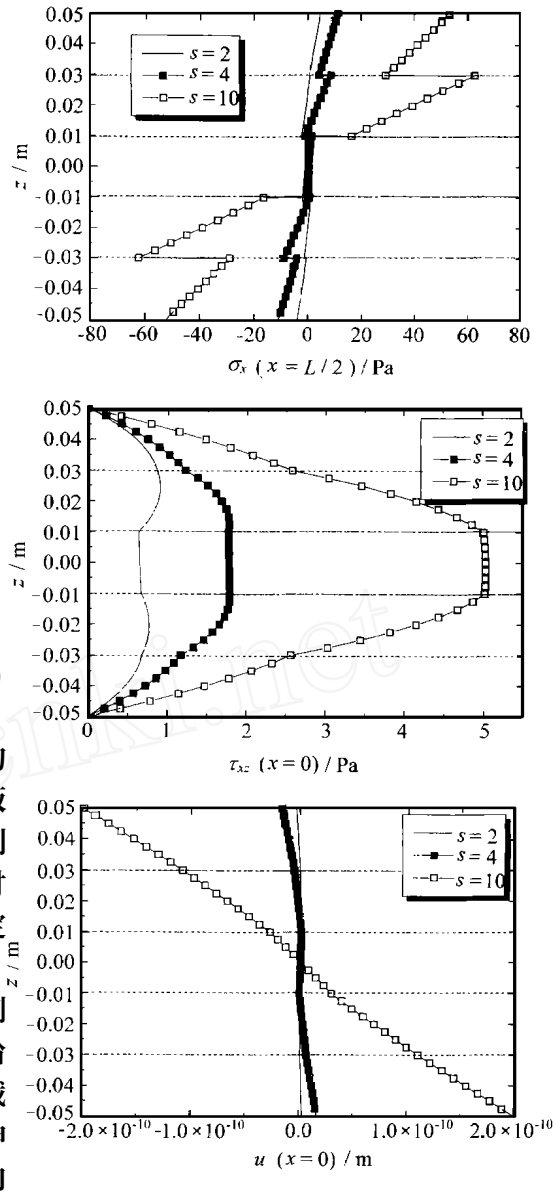

图 2 应力、位移沿厚度分布(算例 1)

Fig. 2 Stress and displacement distribution along thickness (case 1)

然而由于热载荷与电载荷对结构的影响机制不同,将导致结构对热载荷和电载荷的响应具有不同的特点,通过比较图 3 和图 4 可看出,电载荷的影响更加依赖于宽厚比的变化,对于厚板电载荷的影响非常显著,随着板变薄,电载荷的作用减弱。而热载荷没有这种明显的依赖关系。尤其重要的一点是,如图 3 所示,在电荷载下,厚板可能会产生更大的应力尽管它的变形可能更小,从而使得厚板结构更加危险。压电材料层合板也一样,尽管文献[2,3]的作者没有指出这一点,但他们的计算结果确实也能体现出此特点。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

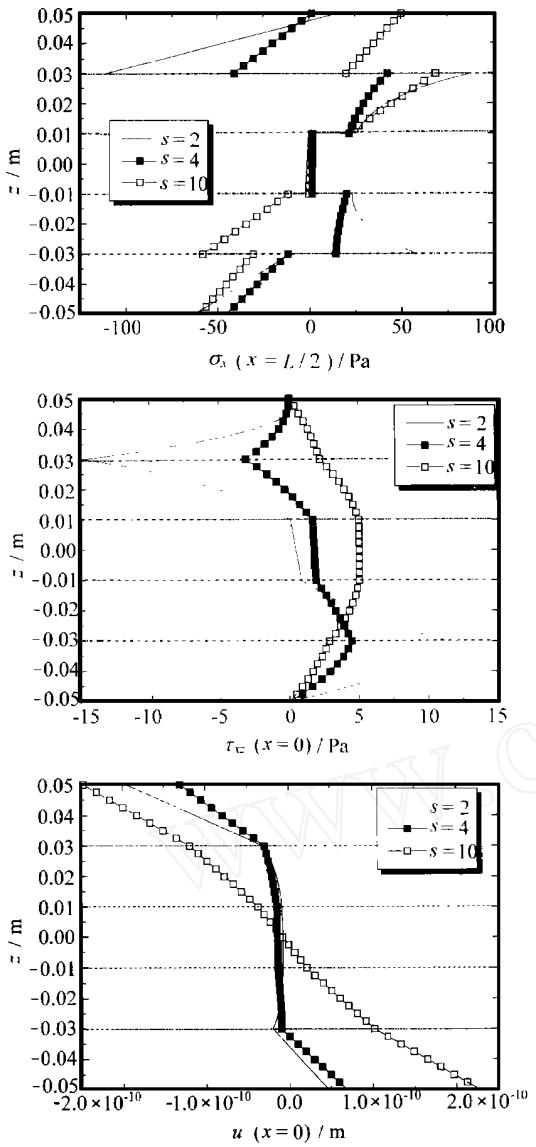

图 3　应力、位移沿厚度分布(算例 2)

Fig. 3　Stress and displacement distribution along thickness (case 2)

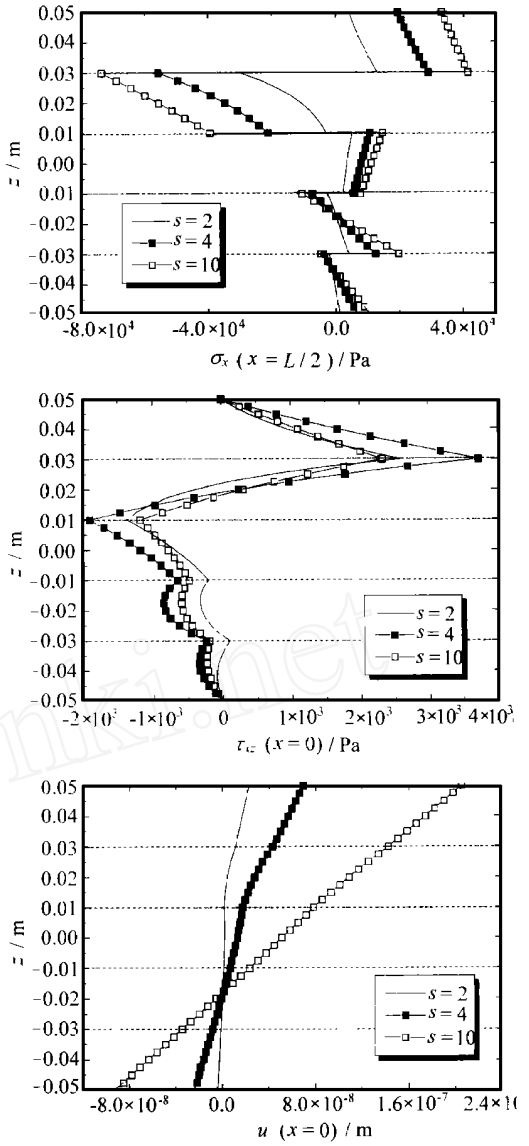

图 4　应力、位移沿厚度分布(算例 3)

Fig. 4　Stress and displacement distribution along thickness (case 3)

4　结　　论

由微分方程出发, 利用富里叶级数展开的方法首次分析了含有各向异性热释电材料铺层的复合材料层合板热机电耦合柱形弯曲问题。该方法能够通用于各种厚度的复层板的精确分析。文中考虑了各种力学、热学和静电学边界模型, 分析了各种耦合元素的相互影响和各自的特点并获得了对此类机-电-热耦合系统新的认识。本文的结果可以用来验证各种理论和数值分析的有效性。

耦合的介入相当大的改变了复层板的变形和应力特征。从数值结果看到, (1) 热与电载荷不但可以引入面内拉压变形和应力, 而且使层间应力的分布阶次明显提高, 从而使板结构不再

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

处于简单机械荷载下的纯弯状态。(2)由于热和电的耦合作用机制不同,结构对它们的响应也就不同:相对热载荷,电载荷的影响与复层板的宽厚比之间的关系更加明显,电荷载对厚板的影响尤为显著,而对薄板的影响反而很弱。热载荷没有这种明显的对厚跨比的依赖关系。(3)尤其要指出,在一般的机械载荷下,薄板相对于厚板总会产生较大的变形和应力,因而更加不安全,但是在电荷载的作用下这种情形就不一定了。在电载荷下,尽管厚板也许具有较小的变形,但它更可能会具有更大的应力,从而更加容易破坏。这一点在工程设计中是很需要注意的。

参 考 文 献

1 孙 慷,张福学. 压电学. 北京:国防工业出版社,1984

2 Ray M C, Rao K M, Samanta B. Exact Analysis of coupled electroelastic behavior of a piezoelectric plate under cylindrical bending. *Computers & Structures*, 1992, 45(4): 667~677

3 Ray M C, Rao K M, Samanta B. Exact solution for static analysis of an intelligent structure under cylindrical bending. *Computers & Structures*, 1993, 47(6): 1031~1042

4 Heyliger P. Static behavior of laminated elastic/piezoelectric plates. *AIAA J*, 1994, 32(12): 2481~2484

5 Ray M C, Bhattacharya R, Samanta B. Exact solutions for static analysis of intelligent structures. *AIAA J*, 1993, 31(9): 1684~1691

6 Lee J S, Jiang L Z. Exact electroelastic analysis of piezoelectric laminae via state space approach. *Int J Solids Structures*, 1996, 33(7): 977~990

7 陈伟球,梁 剑,丁皓江. 压电复合材料矩形厚板弯曲的三维分析. 复合材料学报, 1997, 14(1): 108~115

8 Xu K M, Noor A K, Tang Y Y. Three-dimensional solutions for coupled thermoelectroelastic response of multilayered plates. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 1995, 126: 355~371

9 Dube G P, Kapuria S, Dumir P C. Exact piezothermoelastic solution of simply-supported orthotropic flat panel in cylindrical bending. *Int J Mech Sci*, 1996, 38(11): 1161~1177

ANALYTICAL SOLUTION FOR PIEZO-THERMO-ELASTIC LAMINATES UNDER CYLINDRICAL BENDING

Liu Ming Li Ziran Wu Changchun

(Department of Modern Mechanics, University of Science & Technology of China, Hefei 230026)

Abstract Department of Modern Mechanics, Based on thermo-electro-elastic coupled differential equations, composite laminates with anisotropic piezo-thermo-elastic layers under cylindrical bending are analyzed *via* Fourier series method. Because no simplification is adopted, the method can be used to analyze thin and thick plates exactly. By using complex exponents, the deduction and programming are simplified greatly. In the paper, all possible models for the heat, electric and mechanical boundaries are taken into account. Furthermore, the interactions between the coupled components and their individual characteristics are analyzed, and a marked difference between the structural response under electric-load and thermo-load is found.

Key words piezo-thermo-elastic materials, cylindrical bending, Fourier series

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net